



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Mecànica de materials i càlcul d'estructures →

Juan José Rivera Amores



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Mecànica de materials i càlcul d'estructures →

Juan José Rivera Amores

Primera edició: juliol de 2014

Disseny i dibuix de la coberta: Jordi Soldevila

Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila

Maquetació: Mercè Aicart

© Juan José Rivera Amores, 2014

© Iniciativa Digital Politècnica, 2014
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B-17553-2014

ISBN: 978-84-9880-453-9



Índex

1. Introducció	9
2. Elasticitat	13
2.1. Deformació en un punt	13
2.1.1. Equacions de compatibilitat	19
2.2. Tensió en un punt	21
2.2.1. Tensions principals	26
2.3. Equacions d'equilibri puntuals	28
2.4. Equacions constitutives puntuals	29
2.5. El problema elàstic	31
2.5.1. Resolució de les equacions elàstiques en funció de les tensions	31
2.5.2. Resolució de les equacions elàstiques en funció dels desplaçaments	31
2.6. Problemes	32
3. Esforços a les barres	39
3.1. Estudi seccional	40
3.2. Equacions d'equilibri de les seccions	42
3.3. Recolzaments i graus de llibertat	42
3.4. Combinacions bàsiques de recolzaments	43
3.4.1. Combinació 1	43
3.4.2. Combinació 2	44
3.4.3. Combinació 3	44
3.4.4. Combinació 4	45
3.4.5. Combinació 5	45
3.4.6. Combinació 6	46
3.5. Problemes	46



4. Moments d'inèrcia	115
4.1. Teorema de Steiner	117
4.2. Moment d'inèrcia en una direcció arbitrària	118
4.3. Canvi d'eixos	121
4.4. Eixos principals	122
4.5. Problemes	124
5. Tracció i compressió pura	131
5.1. Efecte de la temperatura	136
5.2. Elements formats de materials diferents	137
5.3. Cilindres i esferes de paret prima	138
5.4. Problemes	139
6. Flexió pura	161
6.1. Flexió recta	162
6.2. Flexió desviada	167
6.3. Equacions d'equilibri en la flexió	170
6.4. Flexió de barres corbes	172
6.5. Problemes. Flexió recta	175
6.6. Problemes. Flexió desviada	187
7. Tracció i compressió excèntrica	201
7.1. Nucli central	202
7.2. Problemes	203
8. Cisallament	219
8.1. Cas general	219
8.2. Teoria elemental de les barres	223
8.3. Problemes	227
9. Torsió	235
9.1. Barres de secció circular	235
9.2. Barres de secció arbitrària	237
9.3. Problemes	243
10. Problemes d'esforços combinats	255
11. Introducció al vinclament de barres	269
12. Equacions de Navier-Bresse	275
12.1. Problemes	277

13. Energia de la deformació	313
13.1. Treball i energia interna	313
13.2. Energia d'elements estructurals	318
13.2.1. Barra sotmesa a esforços normals	319
13.2.2. Barra sotmesa a moments flectors	319
13.2.3. Barra sotmesa a moments torsors	321
13.3. Principi del treball virtual	323
13.4. Principi del treball virtual complementari	324
13.5. Teoremes recíprocs	326
13.6. Principi de l'energia potencial total mínima	327
13.7. Principi de l'energia potencial total complementària mínima	327
13.8. Teoremes de Castigliano	328
13.9. Problemes	329
14. Mètode matricial	361
14.1. Introducció	361
14.2. Estructures articulades	362
14.3. Estructures reticulades	371
14.4. Problemes	384
Bibliografia	459
Índex analític	461

→ 1



Introducció

En el disseny dels elements d'una màquina o d'una estructura, s'ha de tenir en compte el perill de trencament o deformació perillosa per l'acció de les forces exteriors a què estan sotmesos (fig. 1.1).

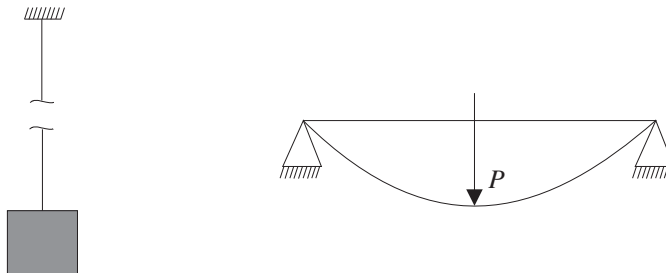


Fig. 1.1
Trencaments o
deformacions perilloses.

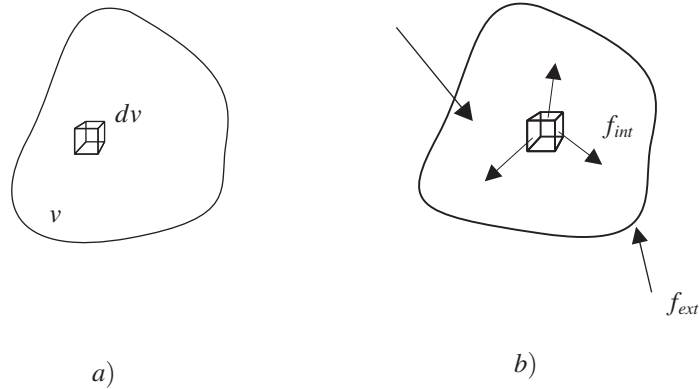
La resistència de materials és la branca de la mecànica que estudia els sòlids com a medi continu i susceptible d'experimentar deformacions, i se centra en els aspectes pràctics i que no requereixen una gran aproximació en els resultats, mentre que l'elasticitat se centra en els aspectes més generals i teòrics.

En un cos no deformat, sobre el qual no hi ha forces externes aplicades, la configuració de les molècules correspon a un estat d'equilibri mecànic i tèrmic sense la presència de forces internes (fig. 1.2a). Això significa que, si considerem un volum qualsevol del cos, sobre ell no actua cap força. Aquesta situació és ideal, ja que en la pràctica sempre hi ha forces externes aplicades, si més no, el pes propi. Quan s'hi apliquen forces externes, el cos es deforma, la posició de les molècules varia i el cos surt de la situació d'equilibri i apareixen forces al seu interior, anomenades *esforços interns* (fig. 1.2 b).

Si el cos, després de treure la càrrega exterior, recupera totalment la seva forma anterior, es diu que té un comportament perfectament *elàstic*. L'experiència ens diu que, quan els esforços interns superen determinats valors característics del cos, aquest rep una deformació residual o *plàstica*. Els elements de les estructures han de ser *resistents* (que no es



Fig. 1.2
a) cos no deformat,
b) cos deformat.

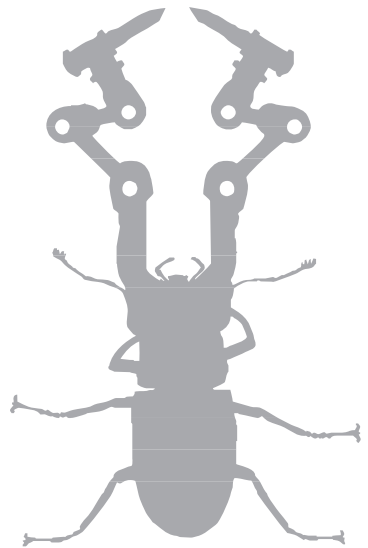


trenquin ni que experimentin deformacions plàstiques), també han de tenir prou *rigidesa* (poc deformables) i han de ser *estables* (conservar la forma).

En fer els càlculs dels diferents elements, s'ha de tenir en compte que, en sotmetre'ls a càrregues de treball, les variacions de forma i dimensions estiguin dintre de les adequades per al funcionament normal de l'element en qüestió. Per exemple, la fletxa màxima permesa d'una biga depèn del tipus d'edifici on ha d'anar col·locada; en un hospital, es permet menys fletxa que en un habitatge particular.

La resistència de materials proporciona mètodes per al càlcul dels esforços interns, les deformacions i els desplaçaments produïts per aquests en els elements estructurals. Les hipòtesis bàsiques que s'adopten són les següents:

- Els desplaçaments i les deformacions que es produeixen són molt petits, comparats amb les dimensions dels elements que es tracten.
- Les forces s'apliquen molt lentament, per la qual cosa podem negligir les vibracions produïdes.
- El conjunt de l'estructura i qualsevol part d'aquesta està en equilibri estàtic sota l'acció de les forces externes i els esforços interns.
- Admetem que les forces actuen independentment les unes de les altres (*principi de superposició*), és a dir, l'acció conjunta de les forces exteriors és igual a la superposició dels efectes produïts per cada una d'elles, aplicades per separat.



→ 2



Elasticitat

2.1. Deformació en un punt

Disposen d'un cos al qual s'apliquen càrregues externes i, com a conseqüència d'aquestes, el cos es mou. Una mesura per saber si el cos s'ha deformat en aquest moviment és calcular la distància entre dos punts molt pròxims i veure si varia. Si aquesta distància no varia, és que el cos s'ha mogut únicament com a sòlid rigid, és a dir, ha experimentat únicament translació i rotació sense deformació interna; si varia, és que hi ha hagut deformació. Per comoditat, en comptes de la distància entre els dos punts prendrem el seu quadrat.

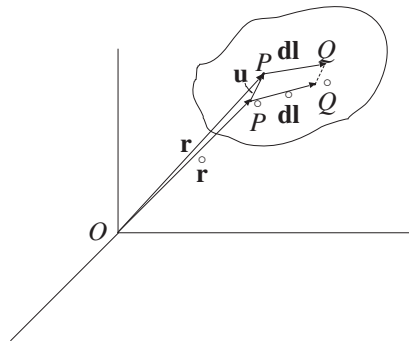


Fig. 2.1
Anàlisi de la deformació.

Suposem, doncs, dos punts molt pròxims $\overset{\circ}{P}$ i $\overset{\circ}{Q}$ abans de la deformació, fig. 2.1; les components del vector posició de $\overset{\circ}{P}$ les designem per $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3)$, de manera que el vector que ens dóna la distància entre els dos punts pròxims abans de la deformació és $\overset{\circ}{dl} = (d\overset{\circ}{x}_1, d\overset{\circ}{x}_2, d\overset{\circ}{x}_3)$. Després de la deformació, aquests dos punts molt pròxims s'han desplaçat a les posicions P, Q , les components del vector posició de P les designem per (x_1, x_2, x_3) , i el vector que ens dóna la distància entre els dos punts pròxims després de la deformació és $dl = (dx_1, dx_2, dx_3)$.



El quadrat de la distància entre dos punts molt pròxims $\overset{\circ}{P}$ i $\overset{\circ}{Q}$ abans de la deformació ve donat pel producte escalar del vector $d\overset{\circ}{x}_i$ per ell mateix, és a dir,

$$d\overset{\circ}{l}^2 = d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_i$$

i després de la deformació aquesta distància es transforma en

$$dl^2 = dx_i dx_i$$

Així, la quantitat $dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2$, que és la que ens indica si hi ha hagut o no deformació, l'escriurem com

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = \delta_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta - \delta_{ij} d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j$$

on hem utilitat la delta de Kronecker δ_{ij} per comoditat en el desenvolupament del que ve a continuació. Podem expressar les coordenades x_α i x_β en funció de les $\overset{\circ}{x}_i$ i $\overset{\circ}{x}_j$, de manera que obtindrem

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}_i} d\overset{\circ}{x}_i \frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{\circ}{x}_j} d\overset{\circ}{x}_j - \delta_{ij} d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j = \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{\circ}{x}_j} - \delta_{ij} \right) d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j$$

definint

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{\circ}{x}_j} - \delta_{ij} \right) \quad (2.1)$$

escriurem simplement

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = 2u_{ij} d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j \quad (2.2)$$

Les quantitats u_{ij} definides d'aquesta manera són les components d'un tensor. El caràcter tensorial es pot verificar considerant un canvi de coordenades. El tensor u_{ij} definit per 2.1 s'anomena *tensor de deformacions*; les components u_{ij} amb $i = j$ les anomenarem *deformacions normals*, si bé de vegades se les anomena *deformacions axials* o també *longitudinals*, i les components amb $i \neq j$, *deformacions de cisallament*, *tangencials* o *tallants*. De la definició, resulta clar que el tensor de deformacions és simètric.

D'altra banda, s'observa que una condició necessària i suficient perquè el moviment del cos consisteixi simplement en un moviment com a sòlid rígid, és a dir, en una translació i una rotació, és que totes les components del tensor de deformacions siguin zero.

És útil expressar el tensor de deformacions en termes del desplaçament que experimenten els punts del cos. Definim el vector desplaçament \mathbf{u} per (fig. 2.1)

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}} \quad (2.3)$$



on \mathbf{r} és el vector posició d'un punt després de la deformació i $\mathring{\mathbf{r}}$, el vector posició del punt abans de la deformació. L'equació 2.3 escrita en components serà

$$u_i = x_i - \mathring{x}_i \quad (2.4)$$

L'equació 2.1 la podem escriure, tenint en compte 2.4,

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \mathring{x}_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \mathring{x}_j} + \delta_{\beta j} \right) - \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \mathring{x}_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \mathring{x}_i} \frac{\partial u_\beta}{\partial \mathring{x}_j} \right) \quad (2.5)$$

El terme més a la dreta de 2.5 és no lineal. Si considerem a partir d'ara que els desplaçaments són petits, aquest terme el podem negligir i així *linealitzar* el problema. Escriurem simplement per a 2.5

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \mathring{x}_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} \right) \quad (2.6)$$

Per veure el significat geomètric de cada un dels termes del tensor de deformacions u_{ij} , observem que, tenint en compte que u_i és funció de \mathring{x}_i , podem escriure

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} d\mathring{x}_j$$

du_i és el desplaçament relatiu de dos punts molt pròxims. L'expressió anterior es pot escriure com

$$du_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \mathring{x}_i} \right) d\mathring{x}_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \mathring{x}_i} \right) d\mathring{x}_j \quad (2.7)$$

i, tenint en compte 2.6,

$$du_i = u_{ij} d\mathring{x}_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \mathring{x}_i} \right) d\mathring{x}_j \quad (2.8)$$

Així, el desplaçament relatiu de dos punts molt pròxims \mathring{P} i \mathring{Q} queda desglosat en dos termes. Observem que, si totes les components del tensor de deformacions són zero (és a dir, no hi ha deformació), només queda el segon terme, que és doncs el desplaçament relatiu degut a la rotació com a sòlid rígid (la translació no provoca desplaçament relatiu entre dos punts). Així, el primer terme és el desplaçament relatiu degut a la deformació.

El terme de rotació el podem escriure en funció del vector rotació de la següent manera: definim les quantitats ω_{ij}

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \mathring{x}_i} - \frac{\partial u_i}{\partial \mathring{x}_j} \right)$$



així podem escriure 2.8 com

$$du_i = u_{ij} \overset{\circ}{dx}_j - \omega_{ij} \overset{\circ}{dx}_j \quad (2.9)$$

les quantitats ω_{ij} són les components d'un tensor que s'anomena *tensor de rotacions* del camp de desplaçaments u_i . Es pot comprovar que és antisimètric, és a dir, que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

A l'espai tridimensional, a partir d'un tensor antisimètric sempre es pot construir un vector ω_k , definit per

$$\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \omega_{ij} \quad (2.10)$$

on e_{kij} és el tensor de permutacions o, el que és el mateix,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} \quad (2.11)$$

El vector $\vec{\omega}$ s'anomena *vector rotació* del camp de desplaçaments u_i . Es pot comprovar també [7] que 2.10 té una relació inversa

$$\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k \quad (2.12)$$

Substituint 2.12 a 2.7 s'obté

$$\begin{aligned} du_i &= u_{ij} \overset{\circ}{dx}_j - \omega_{ij} \overset{\circ}{dx}_j \\ &= u_{ij} \overset{\circ}{dx}_j - e_{ijk} \omega_k \overset{\circ}{dx}_j \\ &= u_{ij} \overset{\circ}{dx}_j - \vec{\omega} \times d\mathbf{l} \end{aligned}$$

És a dir, el desplaçament relatiu de dos punts molt pròxims degut a la rotació és el producte vectorial del vector rotació pel vector que els uneix.

Tornant al primer terme de 2.8, és a dir, al terme del desplaçament relatiu degut a la deformació, que anomenem du_i^{def} escriurem

$$du_i^{def} = u_{ij} \overset{\circ}{dx}_j \quad (2.13)$$

Designant per \mathbf{n} el vector unitari en la direcció dels dos punts $\overset{\circ}{P}$ i $\overset{\circ}{Q}$, tindrem

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{l}}{dl}$$

i així,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{dx}_1 &= d\overset{\circ}{ln}_1 \\ \overset{\circ}{dx}_2 &= d\overset{\circ}{ln}_2 \\ \overset{\circ}{dx}_3 &= d\overset{\circ}{ln}_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

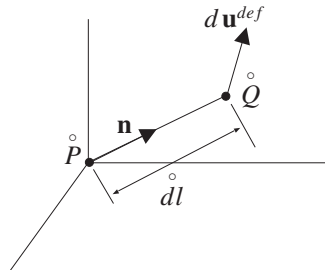


Fig. 2.2
Vector de deformació en
un punt en una direcció.

i es pot escriure 2.13 com

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1^{def}/dl \\ du_2^{def}/dl \\ du_3^{def}/dl \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

el vector de la dreta és, doncs, el desplaçament relatiu unitari degut a la deformació entre dos punts molt pròxims $\overset{\circ}{P}$ i $\overset{\circ}{Q}$ i s'anomena *deformació en el punt $\overset{\circ}{P}$ en la direcció $\overset{\circ}{P}\overset{\circ}{Q}$* , (fig. 2.2).

L'equació 2.15 ens permet deduir el significat dels termes del tensor de deformacions. Prenent dos punts molt pròxims situats abans de la deformació sobre l'eix 1, tal com indica la figura 2.3, en la qual s'ha eliminat l'efecte de la rotació, tindrem

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

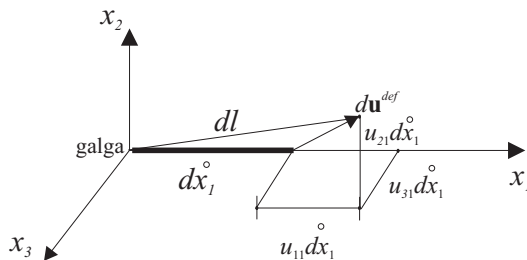
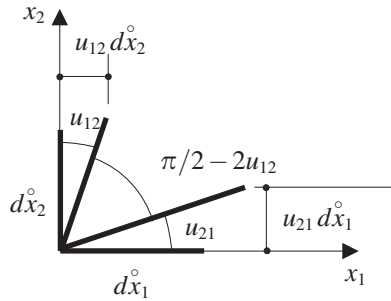


Fig. 2.3
Significat geomètric dels
termes del tensor de
deformacions.

així doncs, $u_{11} = du_1^{def}/dx_1^0$ és la component 1 del desplaçament relatiu unitari degut a la deformació entre dos punts situats inicialment sobre l'eix 1; $u_{21} = du_2^{def}/dx_1^0$ és la component 2, i $u_{31} = du_3^{def}/dx_1^0$, la component 3. El significat geomètric de la quantitat u_{11} i, per extensió, de les quantitats u_{22} i u_{33} queda clar a partir de la figura 2.3. Per entendre millor el significat geomètric de les components del tensor de deformacions amb índexs diferents, vegem, per exemple, el cas de u_{12} . A la figura 2.4, tenim dibuixats dos segments de longituds dx_1^0 i dx_2^0 en les direccions x_1 i x_2 , respectivament. En produir-se la deformació, aquests segments adopten noves posicions; a la figura estan dibuixades les seves projeccions sobre el pla x_1x_2 i s'ha eliminat l'efecte de la rotació com a sòlid



Fig. 2.4
Deformació de
cisallament.



rígid. Observem que els dos segments que abans de la deformació formen un angle recte, després de la deformació, tenint en compte que $u_{12} = u_{21}$, formen un angle de $\pi/2 - 2u_{12}$.

La quantitat $2u_{ij}$ s'anomena *deformació angular* respecte dels eixos i, j i es representa habitualment per γ_{ij} .

Un cop vista la interpretació geomètrica de les components del tensor de deformacions, podem obtenir una expressió aproximada molt útil de l'equació 2.2

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = 2u_{ij}d\overset{\circ}{x}_i d\overset{\circ}{x}_j$$

tenint en compte 2.14, la podem escriure com

$$dl^2 - d\overset{\circ}{l}^2 = 2u_{ij}n_i d\overset{\circ}{l}n_j d\overset{\circ}{l} = 2u_{ij}n_i n_j d\overset{\circ}{l}^2$$

simplificant

$$\frac{dl^2}{d\overset{\circ}{l}^2} = 1 + 2u_{ij}n_i n_j$$

prenent l'arrel quadrada i tenint en compte l'expressió aproximada $\sqrt{1+2a} = 1 + a$, escriurem

$$\frac{dl}{d\overset{\circ}{l}} = 1 + u_{ij}n_i n_j$$

o bé

$$\frac{dl - d\overset{\circ}{l}}{d\overset{\circ}{l}} = u_{ij}n_i n_j$$

expressió que podem escriure en notació matricial com

$$\frac{dl - d\overset{\circ}{l}}{d\overset{\circ}{l}} = (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

i ens dóna la variació de longitud unitària d'un segment situat inicialment en una direcció qualsevol, determinada pel vector unitari \mathbf{n} ; aquesta quantitat és el que mesuraria una galga extensomètrica situada en aquesta direcció.

Atès que el tensor de deformacions és simètric, sempre hi haurà uns eixos de coordenades tals que, respecte d'ells, el tensor serà diagonal. Aquests eixos s'anomenen *eixos principals de deformació* i les components del tensor respecte d'aquests eixos, *deformacions principals*, que designarem per u_1, u_2, u_3 . Així, respecte als eixos principals de deformació, l'equació 2.16 s'escriurà

$$\frac{dl - d\overset{\circ}{l}}{d\overset{\circ}{l}} = (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Veurem més endavant, en analitzar les equacions constitutives puntuals, que els eixos principals de deformació coincideixen amb els eixos principals de tensió.

En analitzar les magnituds termodinàmiques que intervenen en el procés de deformació, apareixen canvis de volum; per tant, és convenient obtenir una expressió per a ells. Designem per dV un element de volum abans de la deformació i per dV' el mateix element després de la deformació.

Tenim, per a dV

$$dV = d\overset{\circ}{x}_1 d\overset{\circ}{x}_2 d\overset{\circ}{x}_3$$

i, segons l'equació 2.16, la quantitat $d\overset{\circ}{x}_1$ es transforma en $d\overset{\circ}{x}_1(1 + u_{11})$ després de la deformació. El mateix succeeix per a les altres components; per tant,

$$dV' = d\overset{\circ}{x}_1(1 + u_{11}) d\overset{\circ}{x}_2(1 + u_{22}) d\overset{\circ}{x}_3(1 + u_{33})$$

i, negligint els productes $u_{ii}u_{jj}$, ja que són infinitedsimos d'ordre superior a u_i , tindrem, per a dV'

$$dV' = dV(1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) = dV(1 + u_{ii})$$

d'on

$$u_{ii} = \frac{dV' - dV}{dV} \quad (2.17)$$

i així u_{ii} representa la variació relativa de volum en produir-se una deformació.

2.1.1. Equacions de compatibilitat

Suposant que coneixem les deformacions u_{ij} , per integració podem trobar el desplaçament u_i a cada punt, amb excepció del moviment com a sòlid rígid que, com ja sabem, dóna lloc a $u_{ij} = 0$. Atesa la simetria del tensor u_{ij} , disposem de sis equacions; prendrem 2.6 en comptes de 2.5



$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

per trobar només tres incògnites, les u_i . Matemàticament, perquè el problema tingui solució única, les sis equacions 2.18 no poden ser arbitràries; hi ha d'haver alguna relació entre elles. Físicament, el fet equival a que la deformació del cos s'ha de produir sense discontinuïtats (podríem dir, sense “trencaments”). Les relacions que hi ha d'haver entre les u_{ij} s'anomenen *equacions de compatibilitat* i les podem obtenir de la manera següent: primer escrivim 2.18 de la forma

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

derivant dos cops, obtenim

$$u_{ij,kl} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl})$$

intercanviant els subíndexs, tenim

$$\begin{aligned} u_{kl,ij} &= \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij}) \\ u_{jl,ik} &= \frac{1}{2} (u_{j,lik} + u_{l,jik}) \\ u_{ik,jl} &= \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}) \end{aligned}$$

expressions a partir de les quals és immediat que

$$u_{ij,kl} + u_{kl,ij} - u_{ik,jl} - u_{jl,ik} = 0 \quad (2.19)$$

aquestes són les *equacions de compatibilitat de Saint-Venant*, obtingudes per ell l'any 1860. De les 81 equacions, en realitat tan sols sis són independents, desglossades són

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial u_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 u_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial u_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial u_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 u_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial u_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial u_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zx}}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{yy}}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 u_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_{zz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 u_{zx}}{\partial z \partial z} &= \frac{\partial^2 u_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{xx}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

queda vist, doncs, que les equacions 2.20 són condicions necessàries per assegurar l'existència d'una solució única per als desplaçaments u_i ; també és cert que són condicions suficients (excepte el moviment de cos rígid); se'n pot trobar la demostració a [7], apartat 4.6.

2.2. Tensió en un punt

Els *esforços interns* són les forces que unes parts del cos fan sobre les altres. Aquestes forces són de tipus molecular i, per tant, de molt curt abast; això vol dir que la força feta sobre un volum qualsevol s'ha d'exercir a través de la superfície que limita el volum. Això té conseqüències molt importants, com veurem de seguida.

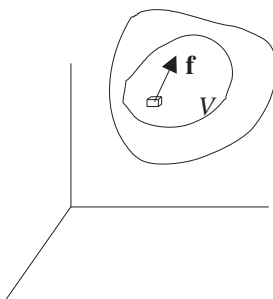


Fig. 2.5
Esforços interns.

Considerem una part qualsevol del cos de volum V (fig. 2.5). La força que actua sobre ella, si no considerem forces a distància, com pot ser el propi pes, és

$$\int_V \mathbf{f} dV \quad (2.21)$$

essent \mathbf{f} la força feta sobre la unitat de volum. Atès que la suma de forces internes és nul·la (tercera llei de Newton), la integral $\int_V \mathbf{f} dV$ és la força total feta per la resta del cos sobre V . Segons hem dit, aquesta força s'ha d'exercir a través de la superfície. Això vol dir que la integral de volum s'ha de poder transformar en una integral de superfície. Des del punt de vista matemàtic, una integral volúmica d'un vector es pot transformar en una integral de superfície si i només si aquest vector és la divergència d'un tensor de segon ordre, és a dir,

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (2.22)$$

on f_i és la component i -èsima del vector \mathbf{f} .

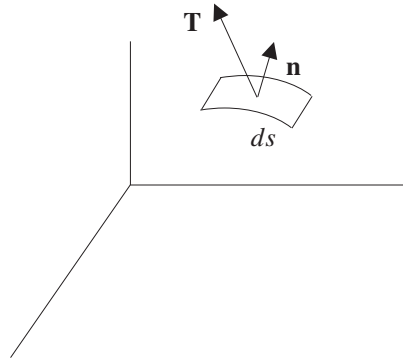
Tenim, doncs, pel teorema d'Stokes

$$\int_V f_i dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \int_S \sigma_{ik} ds_k \quad (2.23)$$

essent S la superfície que delimita el volum V i $d\mathbf{s}$ un vector perpendicular a la superfície en cada punt i de mòdul ds i sentit exterior. σ_{ik} s'anomena *tensor de tensions*. Segons



Fig. 2.6
Tensió en un punt en una direcció.



2.23, $\sigma_{ik} ds_k$ és la component i-èsima de la força feta sobre l'element de superfície ds (fig. 2.6). Si anomenem *tensió* \mathbf{T} aquesta força per unitat de superfície, tindrem

$$\sigma_{ik} ds_k = T_i ds$$

o bé, en termes del vector unitari \mathbf{n} perpendicular a la superfície

$$\sigma_{ik} n_k = T_i \quad (2.24)$$

L'equació 2.24, desglossada en components, serà

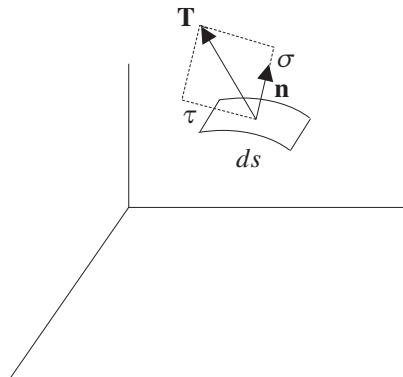
$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ T_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ T_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (2.25)$$

o bé escrita en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

La projecció de \mathbf{T} sobre \mathbf{n} s'anomena *tensió normal* σ i la component definida per $|\mathbf{T} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}|$, *tensió de cisallament* τ (fig. 2.7).

Fig. 2.7
Tensió normal i de cisallament.



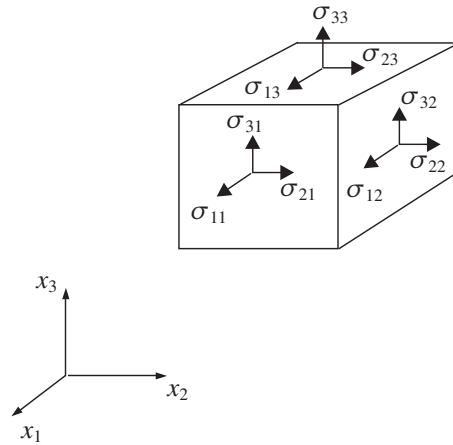


Fig. 2.8
Components del tensor
de tensions.

Observem que σ_{ik} és la component i -èsima de la tensió feta sobre la superfície perpendicular a l'eix x_k (fig. 2.8). Per exemple, si fem $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ a 2.26, tindrem

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}$$

Així, les components σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} són les *tensions normals* sobre les superfícies perpendiculars als eixos 1, 2, 3, respectivament, i σ_{ij} amb $i \neq j$, són les *tensions de cisallament* en aquestes superfícies.

Com que σ_{ij} és un tensor, les components σ'_{ij} respecte d'un altre sistema d'eixos x'_i vindran donades per les equacions

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \sigma_{kl}$$

o bé, de forma desglossada,

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

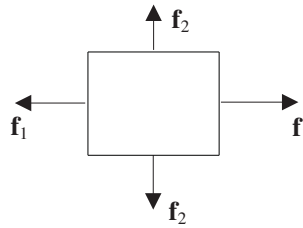
on σ_{ij} són les components del tensor de tensions en el sistema de coordenades x_i ; σ'_{ij} les components del tensor de tensions en el sistema x'_i , i α_{ij} les components de la matriu de rotació per passar d'un sistema a l'altre, és a dir,

$$\alpha_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

El cas en què les components del tensor de tensions en una direcció són totes zero s'anomena *tensió plana*. Si prenem aquesta com la direcció 3, serà $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$.



Fig. 2.9
Tensió plana.



Aquesta situació es dona, per exemple, en el cas d'una placa plana tibada per forces contingudes en el pla de la placa (pla 1,2) (fig. 2.9).

El tensor de tensions σ_{ij} serà, en aquest cas,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que escriurem

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

L'equació 2.26 serà simplement

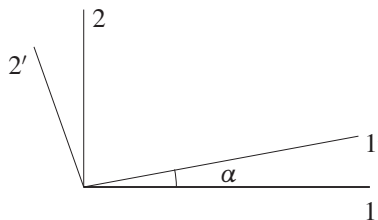
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

i l'equació 2.27

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

on α és l'angle entre els eixos nous 1', 2', i els vells 1, 2 (fig. 2.10).

Fig. 2.10
Canvi d'eixos per rotació.



L'equació 2.29, desglossada en components, és

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

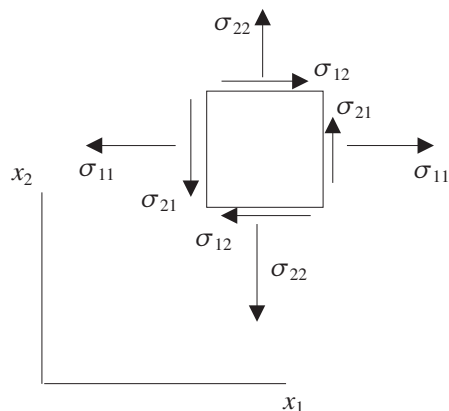


Fig. 2.11
Valors positius en la tensió plana.

Observem que valors positius de les components del tensor de tensions indiquen forces en els sentits indicats a la figura 2.11; les components que actuen sobre la cara vertical de l'esquerra les podem obtenir fent $\mathbf{n} = (-1, 0)$ a 2.28 i les que actuen sobre la cara horitzontal de baix, fent $\mathbf{n} = (0, -1)$ a la mateixa equació.

Deduirem ara un altre resultat important, el fet que el tensor de tensions és simètric. Per a això, calculem el moment respecte d'un punt O arbitrari de les forces fetes sobre un volum qualsevol del cos (fig. 2.12).

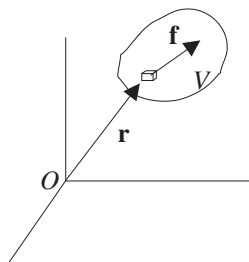


Fig. 2.12
Moment dels esforços interns.

$$\mathbf{M} = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV$$

Les tres components del vector \mathbf{M} són

$$\int_V (f_3 x_2 - f_2 x_3) dV$$

$$\int_V (f_1 x_3 - f_3 x_1) dV$$

$$\int_V (f_2 x_1 - f_1 x_2) dV$$

Escrivim simplement cadascuna de les integrals com

$$M_{ik} = \int_V (f_i x_k - f_k x_i) dV$$



on els valors de i i de k poden ser

$$\begin{aligned} i &= 3, & k &= 2 \\ i &= 1, & k &= 3 \\ i &= 2, & k &= 1 \end{aligned}$$

utilitzant 2.22

$$M_{ik} = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV = \int_V \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int_V \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV$$

a la darrera integral podem posar $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$, on δ_{kl} és la delta de Kronecker. Per tant, tindrem

$$\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \sigma_{ik} \qquad \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \sigma_{ki}$$

i ens quedarà, doncs, per a M_{ik}

$$M_{ik} = \int_V \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int_V (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV \quad (2.30)$$

El moment \mathbf{M} i, per tant, cadascuna de les seves components, s'ha de poder transformar en una integral de superfície per la mateixa raó donada quan fèiem referència a la força resultant: que els esforços interns han d'actuar a través de la superfície. La primera integral de 2.30 és la divergència d'un tensor de segon ordre, integrada en un volum; per tant, es pot transformar en una integral de superfície

$$M_{ik} = \int_S (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) ds_l - \int_V (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV \quad (2.31)$$

Ara bé, la primera integral de 2.31 és el moment de les forces que actuen sobre la superfície; per tant la segona integral ha de ser zero, és a dir,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (2.32)$$

que és el que preteníem demostrar.

2.2.1. Tensions principals

Com hem vist, a cada punt d'un sòlid deformable i sobre cada secció orientada arbitràriament hi ha una tensió que, en general, no és perpendicular a la secció. Considerem una secció sobre la qual la tensió sí que és perpendicular a ella, és a dir, sobre la qual les components de cisallament de la tensió són zero. Si \mathbf{n} és el vector unitari normal a la secció, podrem escriure $\mathbf{T} = \sigma \mathbf{n}$, on σ és el mòdul de \mathbf{T} , o bé en components

$$T_i = \sigma n_i \quad (2.33)$$

Els valors σ donats per 2.33 s'anomenen *tensions principals* i els plans sobre els quals actuen, *plans principals*. Els eixos perpendiculars als plans principals s'anomenen *eixos principals de tensió*. Més endavant, en analitzar les equacions constitutives puntuals, veurem que els eixos principals de tensió coincideixen amb els eixos principals de deformació, per la qual cosa podem anomenar-los simplement *eixos principals*.

Tenint en compte 2.24, podem escriure

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) n_i = 0 \quad (2.34)$$

equació que representa un sistema de tres equacions lineals respecte de n_j . Perquè tingui solució és necessari que

$$|\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}| = 0$$

o bé, en forma desenvolupada,

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

anomenada *equació característica*. La seva resolució ens dona els valors σ , que constitueixen les tensions principals. En ser simètric el tensor σ_{ij} , la solució de l'equació característica sempre dona valors reals, que designem per $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$. Un cop tenim els valors de les tensions principals, podem trobar els vectors normals als plans principals aplicant 2.34, amb la condició afegida que aquests vectors normals siguin unitaris, és a dir,

$$n_i n_i = 1 \quad (2.35)$$

Si prenem com a eixos els eixos principals de tensió, llavors 2.25 ens dona les components de la tensió sobre una superfície qualsevol, que seran

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma^1 n_1 \\ T_2 &= \sigma^2 n_2 \\ T_3 &= \sigma^3 n_3 \end{aligned} \quad (2.36)$$

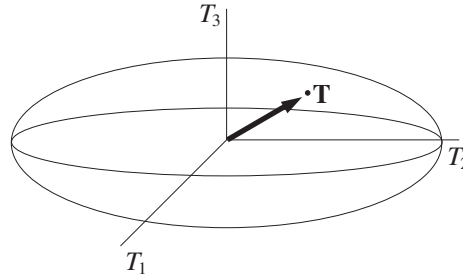
o bé, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

on n_1, n_2, n_3 són les components del vector unitari normal a la superfície. Tenint en compte 2.35, podem escriure

$$\left(\frac{T_1}{\sigma^1}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{T_3}{\sigma^3}\right)^2 = 1$$

Fig. 2.13
El·lipsoide de Lamé.



que representa l'equació d'un el·lipsoide de semieixos $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$, on el vector posició de cada punt de la superfície és la tensió \mathbf{T} en la direcció determinada per 2.36 (fig. 2.13). Aquest el·lipsoide s'anomena *el·lipsoide de Lamé*.

L'observació de la figura ens indica que qualsevol tensió en un punt està compresa entre els valors màxim i mínim de les tensions principals o, dit a l'inrevés, *la tensió principal més gran i la més petita representen els valors màxim i mínim, respectivament, de les tensions en un punt per a qualsevol orientació a l'espai*; d'aquí la importància que té el coneixement de les tensions principals.

Tornant al cas de tensió plana, el càlcul de les tensions principals es pot obtenir d'una manera senzilla aïllant σ'_{12} a 2.29

$$\sigma'_{12} = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.37)$$

igualant a 0, tenim

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

essent α_p l'angle que formen els plans principals amb els eixos 1, 2. Un cop tenim els dos valors per a α_p , substituïm a l'equació 2.29 per tal d'obtenir les tensions principals.

A vegades, també és convenient calcular les tensions de cisallament màximes; aquestes les podem obtenir, per al cas de tensió plana, trobant els màxims de σ'_{12} , i obtenim

$$\tan 2\alpha_t = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_{12}}$$

essent α_t l'angle entre els plans on les tensions de cisallament són màximes i els plans perpendiculars als eixos 1, 2. Substituint novament a 2.29, obtindrem les components de cisallament màximes. En ser la tangent de $2\alpha_t$ i la de $2\alpha_p$ inverses i canviades de signe, l'angle entre els plans principals i els plans on el cisallament és màxim és de 45° .

2.3. Equacions d'equilibri puntuals

Si, a més dels esforços interns, hi ha forces volúmiques, és a dir, forces externes a distància, com per exemple el propi pes del material, les equacions d'equilibri són, tenint en compte 2.22,

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \mathbf{b} = 0 \quad (2.38)$$

on \mathbf{b} és la força a distància aplicada sobre la unitat de volum.

En el cas força habitual que no considerem forces volúmiques, l'expressió anterior s'escriu simplement

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.39)$$

Generalment, la causa de la deformació són forces aplicades directament sobre la superfície del cos. Sigui \mathbf{P} la força exterior per unitat d'àrea aplicada sobre la superfície del cos; la força feta sobre l'element ds ha de coincidir amb $\sigma_{ik} ds_k$.

$$P_i ds = \sigma_{ik} ds_k$$

o bé, en termes del vector unitari a la superfície \mathbf{n} ,

$$P_i = \sigma_{ik} n_k \quad (2.40)$$

Aquestes són les condicions de contorn que s'han de verificar en tota la superfície del cos.

2.4. Equacions constitutives puntuals

Dins el límit elàstic, i per a deformacions molt petites, la tensió σ_{ij} està relacionada amb la deformació u_{ij} segons la *lei de Hooke generalitzada*

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{kl} \quad (2.41)$$

on E_{ijkl} és un tensor de quart ordre anomenat *tensor de mòduls elàstics*. Un procés en el qual es compleixi 2.41 s'anomena *linealment elàstic*. En un material elàstic qualsevol que experimenti un procés adiabàtic o isotèrmic, el tensor E_{ijkl} té només 21 components independents, com es pot deduir per consideracions de simetria del tensor de tensions i del de deformacions. Si, a més, el material és *isòtrop*, és a dir, les seves propietats no depenen de l'orientació dels eixos, aquestes 21 components es redueixen a 2, que designem per λ i μ i s'anomenen *constants de Lamé*, i l'equació 2.41 es pot escriure com

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{kk} + 2\mu u_{ij} \quad (2.42)$$

i, negligint infinitèsims d'ordre superior en el tensor de deformacions, escriurem, segons 2.6,

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

La constant μ en enginyeria és habitual designar-la per G i anomenar-la *mòdul de rigidesa*. L'equació 5.13 en forma desenvolupada i designant els eixos per x, y, z , la podem



escriure

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2Gu_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2Gu_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2Gu_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2Gu_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 2Gu_{yz} \\ \sigma_{xz} &= 2Gu_{xz}\end{aligned}$$

D'aquestes equacions, se'n poden aïllar les quantitats u_{ij} en funció de les σ_{ij} . És habitual en enginyeria treballar, no amb les constants λ i G , sinó amb unes noves constants E i ν , anomenades *mòdul de Young* i *coeficient de Poisson*, respectivament, definides per

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \\ E &= \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}\end{aligned}$$

Utilitzant ν i E , s'obté

$$u_{ij} = \frac{1}{E} ((1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) \quad (2.43)$$

o bé, en forma desenvolupada,

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \\ u_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})) \\ u_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \\ u_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\ u_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \\ u_{zx} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zx}\end{aligned} \quad (2.44)$$

Observem en aquesta darrera equació que els eixos principals de tensió coincideixen amb els eixos principals de deformació. Les constants E i ν tenen una interpretació física senzilla: suposem una situació en la qual existeixen tensions normals solament en una direcció, suposem la x , les equacions 5.14 s'escriuran simplement

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ u_{yy} &= \frac{-\nu}{E} \sigma_{xx} = -\nu u_{xx} \\ u_{zz} &= \frac{-\nu}{E} \sigma_{xx} = -\nu u_{xx}\end{aligned} \quad (2.45)$$

És a dir, *el mòdul de Young és el factor de proporcionalitat entre la tensió i la deformació per al cas unidimensional, i el coeficient de Poisson és el quocient entre la deformació transversal i la longitudinal, canviat de signe, també en el cas unidimensional.*

2.5. El problema elàstic

La descripció completa de l'estat deformat d'un cos implica conèixer de les deformacions, les tensions i el desplaçament en cada punt. donada la simetria del tensor de deformacions i la del de tensions, hi haurà 6 components per a les deformacions, 6 per a les tensions i 3 per al desplaçament, en total 15 incògnites. Per calcular-les, necessitem doncs 15 equacions, que són: 3 equacions d'equilibri, 6 equacions constitutives i 6 equacions de compatibilitat. En general, les condicions de contorn per resoldre el sistema poden ser les forces aplicades a la superfície del cos, els desplaçaments dels punts de la superfície o bé una barreja de totes dues coses. Segons quines siguin les condicions de contorn, serà doncs necessari resoldre el sistema per a les tensions o per als desplaçaments.

2.5.1. Resolució de les equacions elàstiques en funció de les tensions

Considerem el cas d'absència de forces exteriors volúmiques. A les equacions de compatibilitat 2.19

$$u_{ik,lm} + u_{lm,ik} - u_{il,km} - u_{km,il} = 0$$

podem contreure els índexs l i m i n'obtenim

$$u_{ik,ll} + u_{ll,ik} - u_{il,kl} - u_{kl,il} = 0 \quad (2.46)$$

Substituint les equacions constitutives i les equacions d'equilibri 2.39, n'obtenim

$$(1 + \nu) \sigma_{ik,ll} + \sigma_{ll,ik} = 0 \quad (2.47)$$

Aquestes són les anomenades *equacions de compatibilitat de Beltrami-Michell*.

2.5.2. Resolució de les equacions elàstiques en funció dels desplaçaments

Considerem també el cas d'absència de forces exteriors volúmiques. Substituint a les equacions d'equilibri 2.39 les equacions constitutives i la definició del tensor de deformacions u_{ik} , equació 2.6, s'obté

$$u_{i,kk} + \frac{1}{1 - 2\nu} u_{l,il} = 0 \quad (2.48)$$

que és l'*equació de Navier* per al cas d'equilibri en absència de forces exteriors volúmiques.

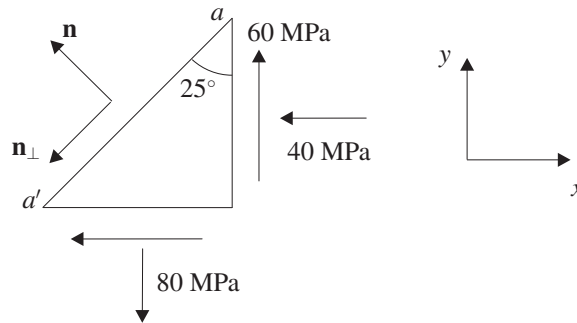
2.6. Problemes

Designarem els eixos x_1, x_2 per x, y , respectivament.

Problema 2.1

Calculeu i dibuixeu les tensions normal i de cisallament en el pla aa de la figura 2.14.

Fig. 2.14



Solució:

El tensor de tensions en el punt d'estudi és

$$\begin{pmatrix} -40 & 60 \\ 60 & 80 \end{pmatrix}$$

Seccionem l'element per al pla $a-a'$. El vector unitari \mathbf{n} perpendicular a la superfície, que servirà per calcular la tensió normal σ , és (fig. 2.14)

$$\mathbf{n} = -\sin 25^\circ \mathbf{i} + \cos 25^\circ \mathbf{j}$$

i el vector unitari \mathbf{n}_\perp , que servirà per calcular la tensió de cisallament τ ,

$$\mathbf{n}_\perp = -\cos 25^\circ \mathbf{i} - \sin 25^\circ \mathbf{j}$$

Així doncs, la tensió \mathbf{T} que actua en el pla aa' val

$$\begin{pmatrix} -40 & 60 \\ 60 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin 25^\circ \\ \cos 25^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} T_x &= 61,6 \text{ MPa} \\ T_y &= -20,56 \text{ MPa} \\ \sigma &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -64,5 \text{ MPa} \\ \tau &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_\perp = -7,3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

El signe negatiu de σ indica que la tensió normal té sentit contrari a \mathbf{n} , és a dir, a la secció hi ha compressió. El signe negatiu de τ indica que la tensió de cisallament té

sentit contrari a \mathbf{n}_\perp . La interpretació gràfica de la tensió i de les seves components la tenim a la figura 2.15.

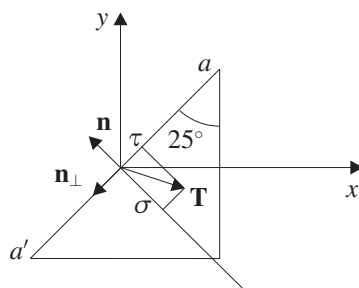


Fig. 2.15

Problema 2.2

L'estat tensional en un punt està representat a la figura 2.16. Calculeu les orientacions dels plans principals i les tensions principals.

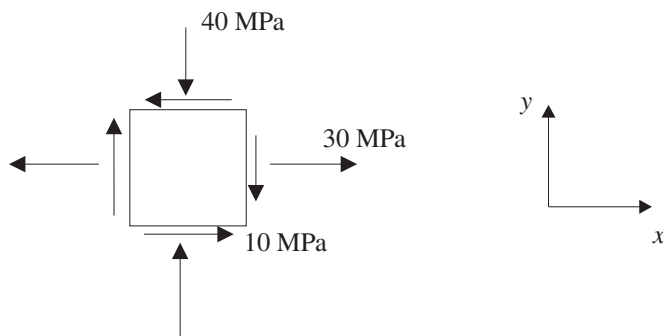


Fig. 2.16

Solució:

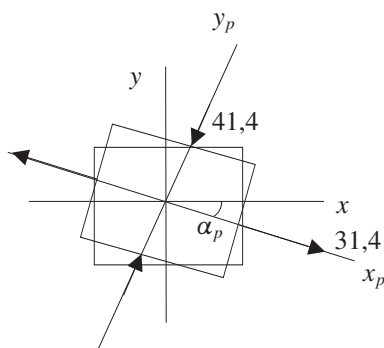


Fig. 2.17

El tensor de tensions respecte dels eixos horitzontal i vertical és

$$\begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & -40 \end{pmatrix}$$



per tant, si anomenem α_p l'angle que formen els plans principals amb els eixos x , y , escriurem

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-20}{70}$$

$$\alpha_p = -7,97^\circ$$

L'orientació dels plans principals serà, doncs, la que s'indica a la figura 2.17.

Les tensions principals, tensions en cada un d'aquests plans principals, seran

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_p} & 0 \\ 0 & \sigma_{y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-7,97^\circ) & \sin(-7,97^\circ) \\ -\sin(-7,97^\circ) & \cos(-7,97^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-7,97^\circ) & -\sin(-7,97^\circ) \\ \sin(-7,97^\circ) & \cos(-7,97^\circ) \end{pmatrix}$$

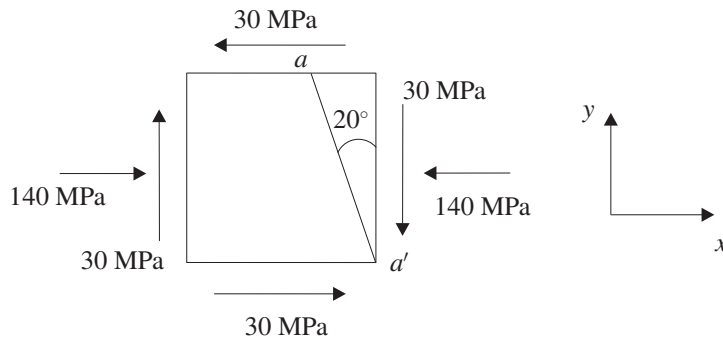
Resolent,

$$\sigma_{x_p} = 31,4 \text{ MPa} \quad \sigma_{y_p} = -41,4 \text{ MPa}$$

Problema 2.3

Calculeu i dibuixeu les tensions normal i de cisallament en el pla aa' de la figura 2.18.

Fig. 2.18



Solució:

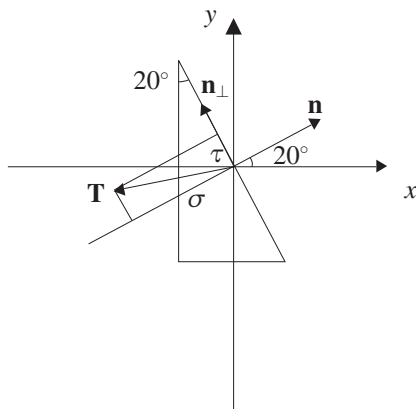
El tensor de tensions en el punt d'estudi és

$$\begin{pmatrix} -140 & -30 \\ -30 & 0 \end{pmatrix}$$

Seccionem l'element per una paralela a $a-a'$. El vector unitari \mathbf{n} perpendicular a la superfície, que servirà per calcular la tensió normal σ , és (fig. 2.19)

$$\mathbf{n} = \cos 20^\circ \mathbf{i} + \sin 20^\circ \mathbf{j}$$

Fig. 2.19



i el vector unitari \mathbf{n}_\perp , que servirà per calcular la tensió de cisallament τ ,

$$\mathbf{n}_\perp = -\sin 20^\circ \mathbf{i} + \cos 20^\circ \mathbf{j}$$

Així doncs, la tensió \mathbf{T} que actua en el pla aa' val

$$\begin{pmatrix} -140 & -30 \\ -30 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} T_x &= -141,8 \text{ MPa} \\ T_y &= -28,19 \text{ MPa} \\ \sigma &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -142,9 \text{ MPa} \\ \tau &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_\perp = 22 \text{ MPa} \end{aligned}$$

El signe negatiu de σ indica que la tensió normal té sentit contrari a \mathbf{n} , és a dir, a la secció hi ha compressió. El signe positiu de τ indica que la tensió de cisallament té el mateix sentit que \mathbf{n}_\perp . La interpretació gràfica de la tensió i de les seves components la tenim a la figura 2.19.

Problema 2.4

Calculeu i dibuixeu les tensions normal i de cisallament en el plà aa de la figura 2.20. Calculeu també les orientacions dels plans principals i les tensions corresponents.

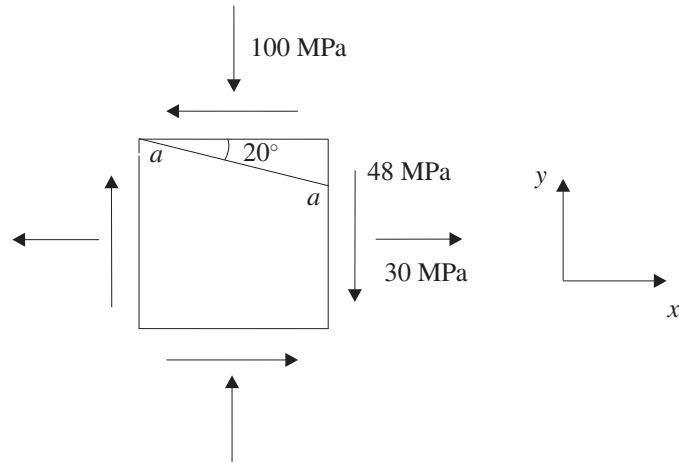
Solució:

El tensor de tensions en el punt d'estudi és

$$\begin{pmatrix} 30 & -48 \\ -48 & -100 \end{pmatrix}$$

Seccionem l'element per $a-a'$. El vector unitari \mathbf{n} perpendicular a la superfície, que servirà per calcular la tensió normal σ , és (fig. 2.21)

Fig. 2.20



$$\mathbf{n} = -\sin 20^\circ \mathbf{i} - \cos 20^\circ \mathbf{j}$$

i el vector unitari \mathbf{n}_\perp , que servirà per calcular la tensió de cisallament τ ,

$$\mathbf{n}_\perp = \cos 20^\circ \mathbf{i} - \sin 20^\circ \mathbf{j}$$

Així doncs, la tensió \mathbf{T} que actua en el pla aa' val

$$\begin{pmatrix} 30 & -48 \\ -48 & -100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin 20^\circ \\ -\cos 20^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

d'on

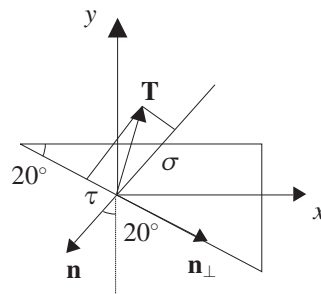
$$T_x = 34,84 \text{ MPa}$$

$$T_y = 110,39 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -115,6 \text{ MPa}$$

$$\tau = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_\perp = -5,02 \text{ MPa}$$

Fig. 2.21



El signe negatiu de σ indica que la tensió normal té sentit contrari a \mathbf{n} , és a dir, a la secció hi ha compressió. El signe negatiu de τ indica que la tensió de cisallament té sentit contrari a \mathbf{n}_\perp . La interpretació gràfica de la tensió i de les seves components la tenim a la figura 2.21.

L'orientació dels eixos principals respecte dels eixos x, y la trobem mitjançant l'expressió

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

substituint dades

$$\tan 2\alpha_p = \frac{-96}{130}$$

d'on

$$\alpha_p = -18,22^\circ$$

les tensions principals σ_{x_p} i σ_{y_p} corresponents seran

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_p} & 0 \\ 0 & \sigma_{y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-18,2) & \sin(-18,2) \\ -\sin(-18,2) & \cos(-18,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & -48 \\ -48 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-18,2) & -\sin(-18,2) \\ \sin(-18,2) & \cos(-18,2) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{x_p} = 45,8 \text{ MPa} \quad \sigma_{y_p} = -115,8 \text{ MPa}$$

La interpretació gràfica dels eixos principals i dels moments principals la tenim a la figura 2.22.

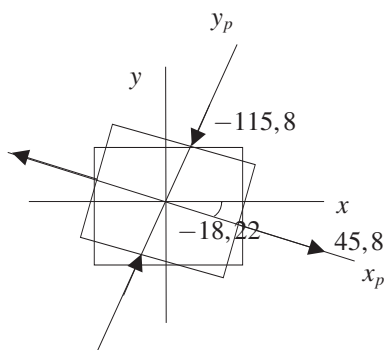


Fig. 2.22

→ 3



Esforços a les barres

Definim una *peça prismàtica* o *barra* (fig. 3.1), com el volum que es genera en moure una secció plana, que anomenem *secció transversal*, al llarg d'una corba a l'espai, de tal manera que el centroide de la secció transversal està situat en tot moment sobre la corba i el vector tangent a la corba és perpendicular a la secció transversal. La corba esmentada l'anomenem *directriu* i la coordenada curvilínia seguint la directriu la designem per s .

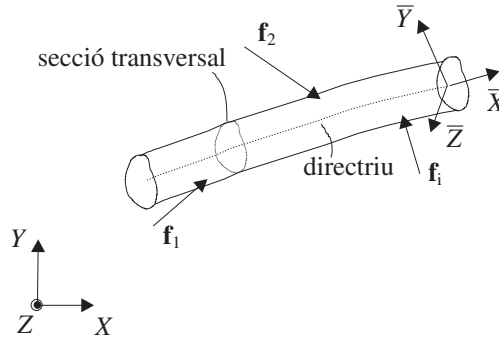


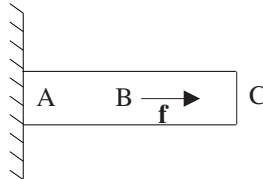
Fig. 3.1
Peça prismàtica.

Per a l'estudi de les barres, definim dos conjunts d'eixos: uns eixos locals que ens serviran per identificar punts dins la secció transversal i uns eixos globals que serviran per identificar la pròpia secció transversal. Per simplicitat en l'escritura, designem sense sobreratllar els eixos que més hem de fer servir, és a dir, quan estem analitzant els esforços a les seccions transversals i els seus moviments, designem sense sobreratllar els eixos globals i, quan estem analitzant les tensions que tenen lloc dins les seccions transversals, designem sense sobreratllar els eixos locals. A la figura 3.1, X, Y, Z són els eixos globals i $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, els eixos locals. Els eixos locals els prendrem de la manera següent: l'eix \bar{X} tangent a la directriu, l'eix \bar{Y} perpendicular a l'eix \bar{X} , és a dir, contingut en la secció transversal, i l'eix \bar{Z} formant un triedre directe amb \bar{X} i \bar{Y} .

3.1. Estudi seccional

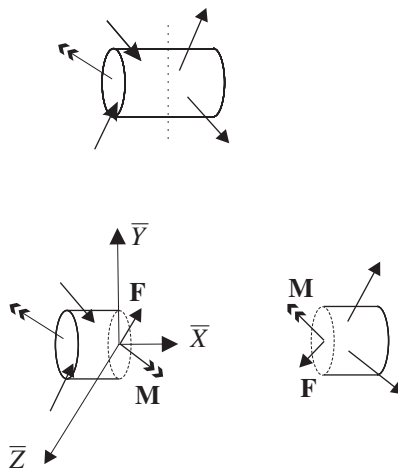
Fins ara, hem estudiat la força per unitat de superfície (tensió) en un punt, per a diferents orientacions. En aquest capítol, estudiem les forces internes i els moments interns totals fets sobre les seccions transversals dels elements, que anomenem simplement *esforços*, i als capítols següents els relacionarem amb les tensions. Considerem l'exemple que es mostra a la figura 3.2. Com que la força externa és aplicada a B, tan sols apareixen esforços interns a la regió AB de l'element; si s'hi apliqués la força a C, apareixerien esforços a tot l'element.

Fig. 3.2
Esforços interns al llarg
d'una barra.



Considerem una barra sobre la qual hi ha aplicades càrregues externes (fig. 3.3). Si talem per una secció transversal qualsevol, a les seccions tallades hi ha *esforços interns* que, segons l'estàtica, podem reduir-los a una força \mathbf{F} i un moment \mathbf{M} aplicats en un punt qualsevol (prendrem el centroid de la secció). Per calcular-los, apliquem les equacions de l'estàtica a qualsevol de les dues parts tallades. És important assenyalar que els esforços interns seran els mateixos si apliquem l'estàtica al tros de l'esquerra que si ho fem al de la dreta, per la tercera llei de Newton, i que són els esforços que actuen en l'estat deformat.

Fig. 3.3
Esforços interns.



Atès que els desplaçaments els considerem molt petits, juntament amb les deformacions, podem, com a primera aproximació, aplicar l'equilibri en l'estat no deformat per determinar-ne els esforços. Això simplifica molt el problema, ja que la geometria de l'estat deformat no la coneixem fins que no resollem les equacions corresponents (les d'equilibri i les que lliguen els esforços amb les tensions).



Les components de \mathbf{F} respecte dels eixos locals \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , de l'estat no deformat les designarem per N , $Q_{\bar{Y}}$, $Q_{\bar{Z}}$ i les de \mathbf{M} , per $M_{\bar{X}}$, $M_{\bar{Y}}$, $M_{\bar{Z}}$. Així doncs, N és un *esforç normal*, $Q_{\bar{Y}}$ i $Q_{\bar{Z}}$ són *esforços de cisallament*, $M_{\bar{Y}}$ i $M_{\bar{Z}}$ són *moments flectors* i $M_{\bar{X}}$ és un *moment torsor*.

Si l'únic esforç que actua és un esforç normal aplicat al centroid de la secció transversal, llavors l'estat de sol·licitació corresponent s'anomena *tracció o compressió pura*; si està aplicat en un punt diferent del centroid, s'anomena *tracció o compressió excèntrica*. Si l'únic esforç que actua és un moment flector, l'estat de sol·licitació corresponent s'anomena *flexió pura*. I si l'únic esforç que hi ha és un moment torsor, l'estat de sol·licitació corresponent s'anomena *torsió*.

Si la directriu de la barra és una corba plana i totes les forces estan contingudes en aquest pla (fig. 3.4), llavors l'esforç \mathbf{F} també estarà contingut en aquest pla i el moment \mathbf{M} serà perpendicular a ell. Prenent els eixos locals \bar{X} , \bar{Y} en aquest pla (\bar{X} tangent a la directriu), llavors \mathbf{F} solament tindrà dues components: $F_{\bar{X}}$, que anomenarem N , i $F_{\bar{Y}}$, que anomenarem Q , i el vector moment \mathbf{M} només tindrà una component: $M_{\bar{Z}}$. Prenem els eixos globals X , Y en el mateix pla que la directriu i tal que $\bar{Z} = Z$, així podem designar els tres esforços per: N , Q , M_z . Anomenem aquesta situació *cas bidimensional*.

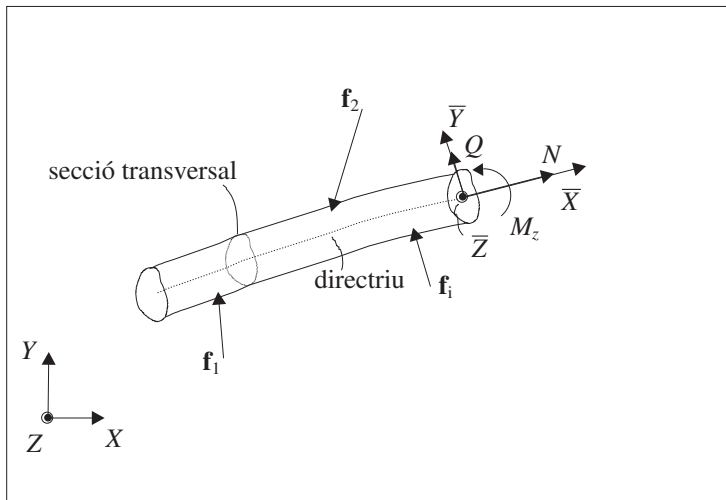


Fig. 3.4
Cas bidimensional.

Com veurem més endavant, si solament hi ha esforços normals i moments flectors, llavors les seccions transversals es mantenen planes (*hipòtesi de Navier*) i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat. Si es consideren solament les deformacions produïdes per flexió, s'obté l'anomenat *model d'Euler-Bernoulli*. En canvi, si existeixen esforços de cisallament deguts a càrregues transversals, llavors els supòsits anteriors no es compleixen; les seccions transversals deixen de mantenir-se planes i, encara que considerem seccions petites, no seran perpendiculars a la línia de centroides. Tampoc no es verifica la hipòtesi de Navier en seccions no circulars sotmeses a moments torsors, com veurem en estudiar la torsió (capítol 9).

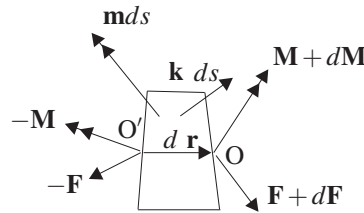
3.2. Equacions d'equilibri de les seccions

Considerem l'element de barra comprès entre dues seccions transversals molt pròximes (fig. 3.5), i designem per \mathbf{r} el vector que uneix els centroides de les dues seccions i per ds el seu mòdul. Anomenant \mathbf{k} la força exterior exercida sobre la unitat de longitud de la barra en l'estat no deformat, l'equilibri de forces per a l'element diferencial estableix que

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{k} = 0 \quad (3.1)$$

Per establir l'equilibri de moments, ho fem respecte del punt O, que és el centroide de la secció frontal en el sentit d'avanç de la barra (fig. 3.5). Suposem que actua un moment \mathbf{m} per unitat de longitud de la barra de l'estat no deformat.

Fig. 3.5
Forces i moments en un
element diferencial
de barra.



L'equilibri de moments s'escriu, negligint infinitesims d'ordre superior

$$d\mathbf{M} + (-d\mathbf{r} \times (-\mathbf{F})) + \mathbf{m}ds = 0$$

dividint l'expressió per ds

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0 \quad (3.2)$$

En el cas bidimensional, on apareixen, com ja hem dit, únicament els esforços N, Q i M_z (fig. 3.4), l'equació anterior es converteix, a manca de forces i moments distribuïts i respecte als eixos locals, en

$$\frac{dM_z}{ds} = -Q$$

3.3. Recolzaments i graus de llibertat

En el cas bidimensional, cada secció transversal de la barra té tres graus de llibertat: un desplaçament en la direcció de l'eix X , que designarem per u ; un desplaçament en la direcció de l'eix Y , que anomenarem v , i un gir al voltant de l'eix Z , que anomenarem θ . En determinats punts de la barra, cada un d'aquests graus de llibertat pot estar coaccionat totalment o parcialment, i donar lloc als diferents tipus de recolzament. A la figura 3.6, hi ha dibuixats els diferents recolzaments d'una barra bidimensional

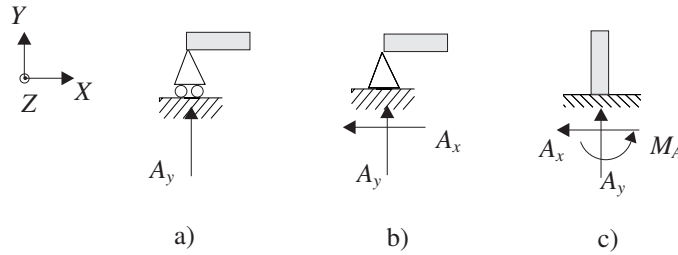


Fig. 3.6
Recolzaments en el cas
bidimensional.

El recolzament *a*, anomenat *rodet*, només coacciona el desplaçament en la direcció *Y* perquè en ell pot aparèixer una força de reacció en aquesta direcció. Per tant, en un rodet només hi haurà una força de reacció possible. El recolzament *b*, anomenat *articulació*, només coacciona els desplaçaments en *X* i *Y* perquè a que en ell poden aparèixer dues forces de reacció en aquestes direccions. Per tant, en una articulació, només hi ha dues forces de reacció possibles. El recolzament *c*, anomenat *encastament*, coacciona el desplaçaments en *X* i *Y* i el gir al voltant de *Z* perquè en ell poden aparèixer dues forces de reacció en les direccions *X*, *Y* i un moment de reacció en la direcció *Z*. Per tant, en un encastament, hi ha tres reaccions possibles: dues forces i un moment.

En el cas tridimensional, hi ha sis graus de llibertat per a les seccions transversals: tres desplaçaments en les direccions *X*, *Y*, *Z*, i tres girs al voltant d'aquests tres eixos. Hi ha, doncs, una varietat molt àmplia de recolzaments segons coaccionin els diferents graus de llibertat.

3.4. Combinacions bàsiques de recolzaments

Vegem ara algunes combinacions senzilles de recolzaments i l'esquema de càlcul en cada situació. Prenem uns eixos globals *X*, *Y*, *Z*, que serviran en els problemes per localitzar les seccions transversals de les barres.

3.4.1. Combinació 1

És una barra encastada amb una força axial a l'extrem (figura 3.7). En aquest cas, no hi ha desplaçament en la direcció *Y* ni gir al voltant de l'eix *Z*, solament desplaçament en la direcció *X*. És a dir, les seccions transversals només tenen un grau de llibertat *u*. Si ens fixem en les dues seccions extremes A i B, tindrem, doncs, en total dos graus de llibertat: u_A i u_B . D'aquests dos graus de llibertat, u_A està coaccionat a zero atès que apareix una reacció A_x .

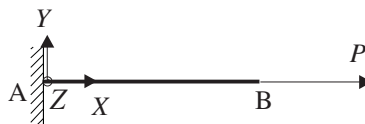


Fig. 3.7
Encastament.

Resoldre l'estructura és calcular les reaccions i els graus de llibertat no coneguts; en aquest cas, tenim dues incògnites: A_x i u_B . Per calcular-les necessitem dues equacions;



una d'elles és la de l'estàtica i l'altra la veurem més endavant en analitzar les equacions de Navier-Bresse o les equacions de l'energia. L'esquema és

graus llibertat 2: u_A, u_B

inc. 2: A_x, u_B

eq.: 1 est. + (1 Navier-Bresse o energia)

Amb l'estàtica, podem calcular totes les reaccions (en aquest cas només n'hi ha una), raó per la qual s'anomena *isostàtica* (el cas contrari, *hiperestàtica*).

3.4.2. Combinació 2

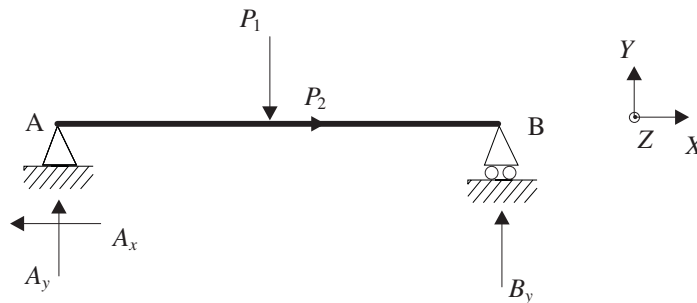
És la representada a la figura 3.8. En aquest cas, cada secció té tres graus de llibertat: dos desplaçaments i un gir. Si ens fixem en les dues seccions extremes A i B, tenim, doncs, en total sis graus de llibertat: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$. D'aquests sis graus de llibertat, estan coaccionats a zero u_A, v_A i v_B . L'esquema és

graus llibertat 6: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$

inc. 6: $A_x, A_y, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$

eq.: 3 est. + (3 Navier-Bresse o energia)

Fig. 3.8
Articulació-rodet.



Com que amb les tres equacions de l'estàtica podem calcular les tres reaccions, l'estructura és isostàtica.

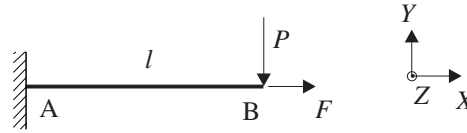
3.4.3. Combinació 3

És la de la figura 3.9. En aquest cas, cada secció té tres graus de llibertat: dos desplaçaments i un gir. Si ens fixem en les dues seccions extremes A i B, tenim, doncs, en total sis graus de llibertat: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$. D'aquests sis graus de llibertat, estan coaccionats a zero u_A, v_A i θ_A . L'esquema és

graus llibertat 6: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$

inc. 6: $A_x, A_y, M_A, u_B, v_B, \theta_B$

eq.: 3 est. + (3 Navier-Bresse o energia)

Fig. 3.9
Voladiu.

Com que amb les tres equacions de l'estàtica podem calcular les tres reaccions, l'estructura és isostàtica.

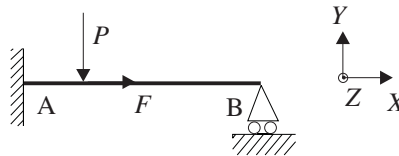
3.4.4. Combinació 4

És la representada a la figura 3.10. En aquest cas, cada secció té tres graus de llibertat: dos desplaçaments i un gir. Si ens fixem en les dues seccions extremes A i B, tenim, doncs, en total sis graus de llibertat: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$. D'aquests sis graus de llibertat, estan coaccionats a zero u_A, v_A, θ_A i v_B . L'esquema és

graus llibertat 6: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$

inc. 6: $A_x, A_y, M_A, u_B, v_B, \theta_B$

eq.: 3 est. + (3 Navier-Bresse o energia)

Fig. 3.10
Encastament-rodet.

Com que amb les tres equacions de l'estàtica no podem calcular les quatre reaccions, l'estructura és hiperestàtica.

3.4.5. Combinació 5

És la representada a la figura 3.11, igual que la combinació 4, però amb un element intermedi en el punt B, que anomenarem *passador*, que provoca que a la secció on està col·locat no hi ha esforç de moment flector. És a dir, a un costat i l'altre del passador el moment flector és zero. Aquesta estructura, que sense el passador hem vist que és hiperestàtica, ara es converteix en isostàtica. Vegem-ho.

En estar segurs que al punt B no hi ha moment flector, tallem per aquest punt i apliquem l'estàtica al tros de l'esquerra o al de la dreta, tenim tres equacions més i solament ens apareixen dues incògnites més, que són N_B i Q_B . D'altra banda, el gir de la secció situada a l'esquerra del punt B és diferent del de la situada a la dreta; els anomenarem, respectivament, θ_B^- , θ_B^+ . Considerant les tres seccions A, B i C i incorporant com a incògnites N_B i Q_B , l'esquema serà el següent:

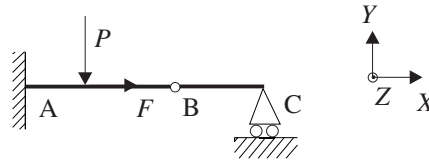
graus llibertat 10: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B^-, \theta_B^+, u_C, v_C, \theta_C$

inc. 12: $A_x, A_y, M_A, u_B, v_B, \theta_B^-, \theta_B^+, u_C, v_C, \theta_C, N_B, Q_B$

eq.: 3 est. conjunt + 3 est. tros AB + (6 Navier-Bresse o energia)



Fig. 3.11
Barra amb passador.



Com que amb les sis equacions de l'estàtica podem calcular les quatre reaccions (addicionalment, també podem calcular els esforços en el punt B), l'estructura és isostàtica.

3.4.6. Combinació 6

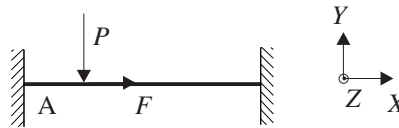
És la representada a la figura 3.12. En aquest cas, cada secció té tres graus de llibertat: dos desplaçaments i un gir. Si ens fixem en les dues seccions extremes A i B, tindrem, doncs, en total sis graus de llibertat: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$. D'aquests sis graus de llibertat, estan coaccionats a zero $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$, és a dir, tots els graus de llibertat. L'esquema és

graus llibertat 6: $u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B$

inc. 6: $A_x, A_y, M_A, B_x, B_y, M_B$

eq.: 3 est. + (3 Navier-Bresse o energia)

Fig. 3.12
Encastament-
encastament.



Com que amb les tres equacions de l'estàtica no podem calcular les tres reaccions, l'estructura és hiperestàtica.

Observem, a tall de resum, que qualsevol estructura, sigui isostàtica o hiperestàtica, es pot resoldre, és a dir, se'n poden calcular les reaccions externes, els esforços interns i els desplaçaments i girs que aquests provoquen. Si és isostàtica, amb les equacions de l'estàtica es podran calcular les reaccions externes i, un cop conegudes aquestes, es podran calcular els esforços interns; a continuació, amb les equacions de Navier o les energètiques es podran calcular els desplaçaments i girs. Si és hiperestàtica, ajuntant les equacions de l'estàtica amb les de Navier-Bresse o les energètiques, es podran calcular les reaccions externes i, seguidament, els esforços interns, desplaçaments i girs.

3.5. Problemes

Recordem que, per localitzar les seccions transversals de les barres, necessitem uns eixos globals, que anomenarem X, Y, Z . Els esforços dins la secció transversal estan definits respecte d'uns eixos locals $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. En el cas bidimensional, l'esforç normal N el dibuixarem sempre seguint l'eix \bar{X} , és a dir, perpendicular a la secció transversal i cap a l'exterior de la peça, l'esforç de cisallament Q seguint l'eix \bar{Y} , que és un eix contingut a la secció transversal, i el moment flector M_z seguint l'eix $\bar{Z} = Z$, que recordem, que és



pres de tal manera que el producte vectorial de \bar{X} per \bar{Y} sigui \bar{Z} . En moltes figures, per no carregar-les excessivament, ometrem aquests eixos locals.

Problema 3.1

En quina part de la barra representada a la figura 3.13 no varien els esforços en traslladar la força d'A a B?

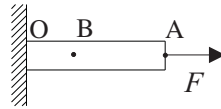


Fig. 3.13

Solució:

A la regió OB, l'esforç continua essent un esforç de tracció igual a F (vegeu la figura 3.14). A la regió OC, l'esforç serà ara igual a zero (vegeu la figura 3.15).

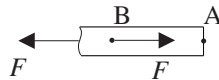


Fig. 3.14



Fig. 3.15

Problema 3.2

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.16.

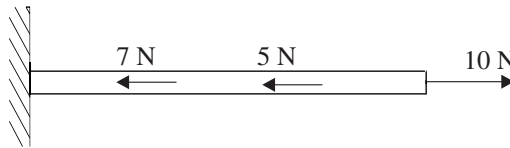


Fig. 3.16

Solució:

A la figura 3.17, observem les regions a estudiar

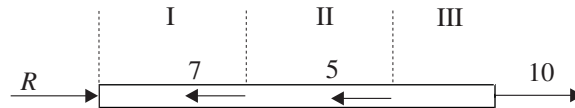


Fig. 3.17

Aplicant l'estàtica a la barra, calculem la reacció a l'encastament

$$R + 10 = 7 + 5 \quad R = 2$$

A la regió I (figura 3.18),

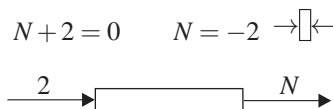
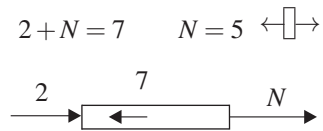


Fig. 3.18



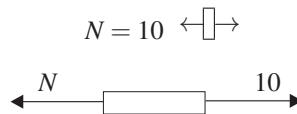
A la regió II (figura 3.19),

Fig. 3.19



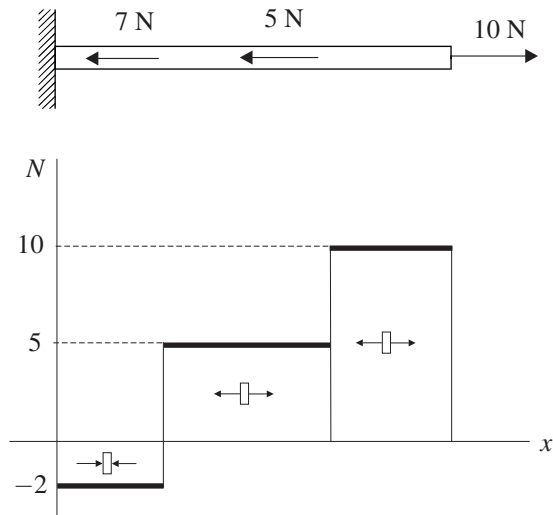
A la regió III (figura 3.20),

Fig. 3.20



La representació gràfica dels esforços normals la tenim a la figura 3.21

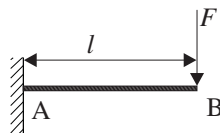
Fig. 3.21



Problema 3.3

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.22.

Fig. 3.22



Solució:

Primerament, calculem les reaccions externes aplicant l'estàtica a la barra (fig. 3.23)

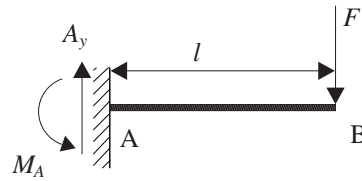


Fig. 3.23

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = F$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = F \cdot l$$

En aquest cas, només existeix una regió. Fem un tall dins la regió i separem el tros de la dreta (fig. 3.24)

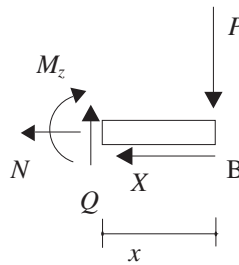


Fig. 3.24

Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q = F \uparrow \downarrow$$

$$N = 0$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -F \cdot x$$

essent el domini per a les x : $0 < x < l$. Donant valors a x ,

$$M_z(0) = 0 \quad M_z(l) = -Fl \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.25)

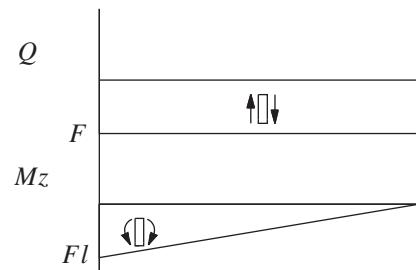
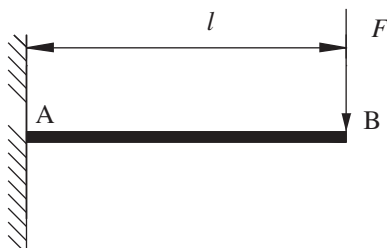


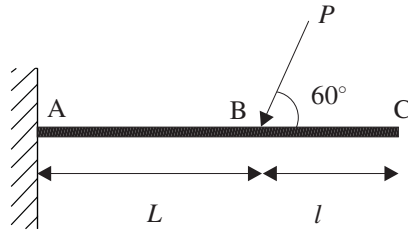
Fig. 3.25



Problema 3.4

Trobeu els esforços interns de la estructura següent (fig. 3.26).

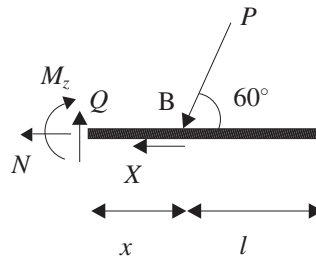
Fig. 3.26



Solució:

Considerem dues regions: una que va d'A a B, que anomenem regió I, i l'altra de B a C, regió II. Per a la regió I, tenim (fig. 3.27),

Fig. 3.27



$$N + P \cos 60 = 0 \rightarrow N = -P \cos 60 \rightarrow \leftarrow$$

$$Q = P \sin 60 \uparrow \downarrow$$

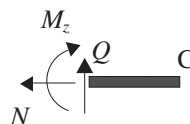
$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -P \sin 60 x$$

essent el domini per a les x : $0 < x < L$. Donant valors a la x , obtenim

$$B : M_z(0) = 0 \quad A : M_z(L) = -P \sin 60 L \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Per a la regió II, tots els esforços són zero (fig. 3.28),

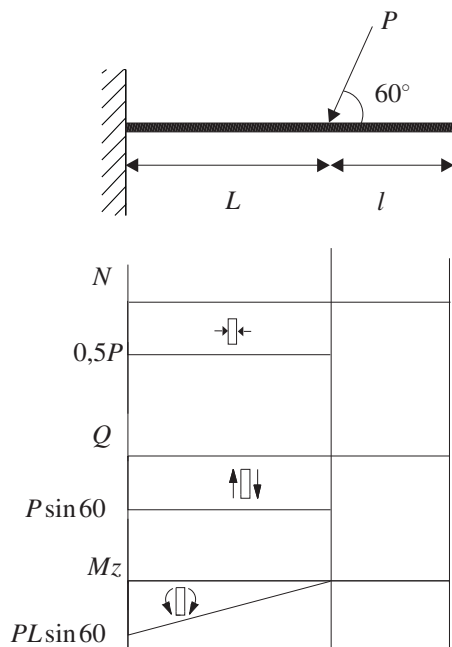
Fig. 3.28



Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.29)



Fig. 3.29



Problema 3.5

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.30.

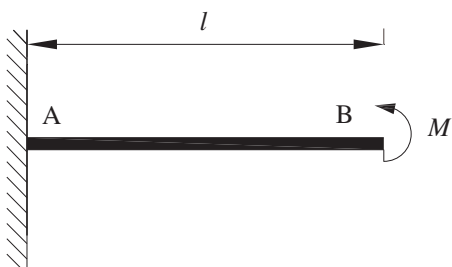


Fig. 3.30

Solució:

Primerament, calculem les reaccions externes aplicant l'estàtica a la barra (fig. 3.31)

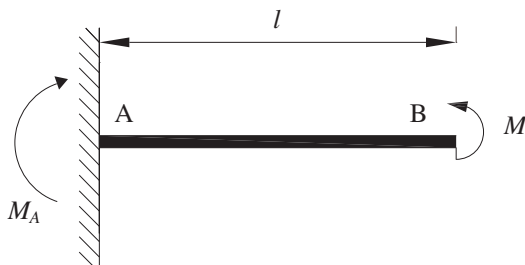


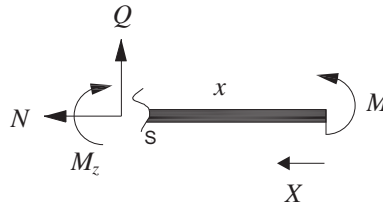
Fig. 3.31



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = M$$

En aquest cas, només hi ha una regió; fem un tall dins la regió i separem el tros de la dreta (fig. 3.32)

Fig. 3.32



Aplicant l'estàtica, tenim

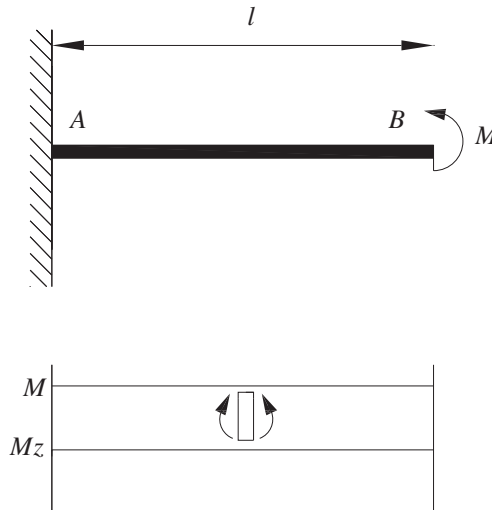
$$Q = 0$$

$$N = 0$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = M \quad \curvearrowright \quad \curvearrowleft$$

essent el domini per a les x : $0 < x < l$. Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.33)

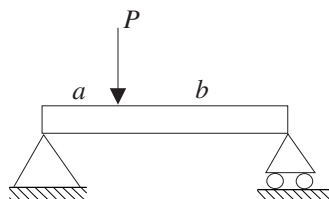
Fig. 3.33



Problema 3.6

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.34.

Fig. 3.34





Solució:

El primer que fem és calcular les reaccions externes aplicant l'estàtica a la barra. Suposem que les dues reaccions verticals són cap amunt.

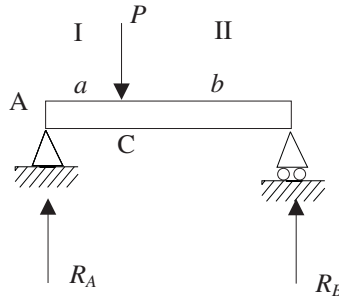


Fig. 3.35

$$\sum f_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Pa = R_B(a + b)$$

d'on

$$R_A = Pb/(a + b) \quad \text{i} \quad R_B = Pa/(a + b)$$

El pas següent és establir quines regions diferenciades existeixen a l'hora de determinar els esforços interns. Considerem dues regions: una que va de A a C, que anomenem regió I, i una altra que va de C a B, que anomenem regió II.

Per esbrinar els esforços dins de cada una de les regions, fem un tall dins de la regió, separem la part de l'esquerra o bé la de la dreta, i apliquem l'estàtica al tros separat; el resultat serà, evidentment, el mateix. Els esforços interns els dibuixem sempre positius, és a dir, seguint els sentits positius dels eixos.

Regió I: Fem un tall dins de la regió i separem el tros de l'esquerra.

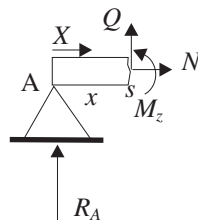


Fig. 3.36

Aplicant l'estàtica, tenim

$$N = 0$$

$$Q = -R_A = -Pb/(a + b) \quad \uparrow \downarrow$$

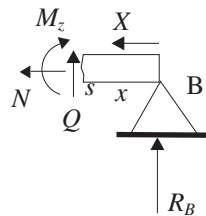
$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = R_A x$$

essent el domini per a les x : $0 < x < a$. Donant valors a x ,

$$M_z(0) = 0 \quad M_z(a) = Pab/(a+b) \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Regió II: Fem un tall dins de la regió i separem el tros de la dreta.

Fig. 3.37



Aplicant l'estàtica tenim

$$N = 0$$

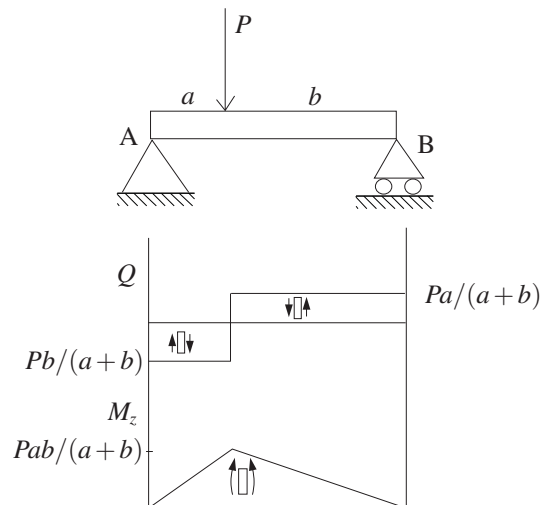
$$Q = -R_B = -Pa/(a+b) \quad \downarrow \uparrow$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = R_B x$$

essent el domini per a les x : $0 < x < b$. Donant valors a x ,

$$M_z(0) = 0 \quad M_z(b) = Pab/(a+b) \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Fig. 3.38



Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.38).

Problema 3.7

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.39.

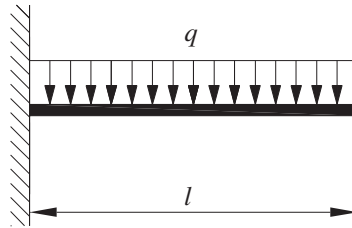


Fig. 3.39

Solució:

Calculem primerament les reaccions externes aplicant l'estàtica a la barra (fig. 3.40)

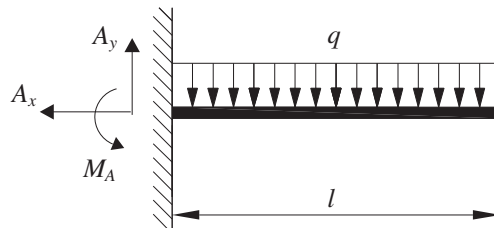


Fig. 3.40

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = q \cdot l$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

Tenim només una regió; fem un tall i separem el tros de la dreta (fig. 3.41)

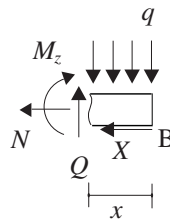


Fig. 3.41

Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q = q \cdot x$$

$$N = 0$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -\frac{q \cdot x^2}{2}$$

essent el domini per a les x : $0 < x < l$. Donant valors a x ,

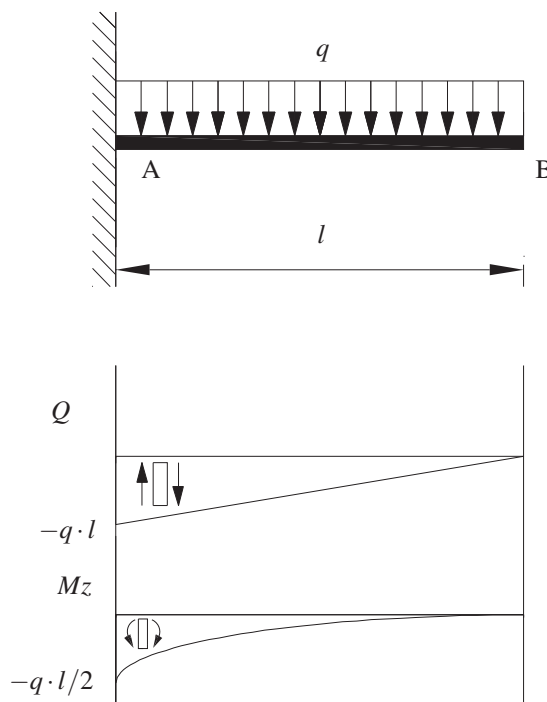
$$Q(0) = 0 \quad Q(l) = ql \quad \uparrow \downarrow$$

$$M_z(0) = 0 \quad M_z(l) = ql^2/2 \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Com que el moment és una equació de segon grau, el gràfic és una paràbola. Trobem el vèrtex per tal de facilitar-ne el dibuix; derivant l'equació de moments i igualant a 0 $M' = -q \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$, és a dir, el vèrtex és al punt amb $x = 0$, que correspon al punt B.

Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.42). Observem que la concavitat és la indicada, ja que el vertex és al punt B (si dibuixéssim la concavitat al revés, el vertex seria al punt A).

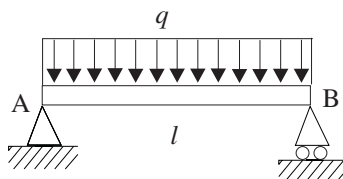
Fig. 3.42



Problema 3.8

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.43.

Fig. 3.43





Solució:

Les reaccions externes són dues reaccions verticals únicament ja que el rodet impedeix l'aparició de reaccions horitzontals (n'hi podria haver una a l'esquerra, però en aplicar l'estàtica es veu clarament que ha de ser zero). Estan indicades a la figura 3.44.

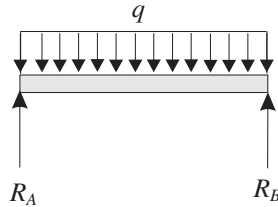


Fig. 3.44

Aplicant l'estàtica, obtenim

$$R_A = \frac{ql}{2} \quad R_B = \frac{ql}{2}$$

Per trobar els esforços Q i M_z , fem un tall a l'única regió a considerar (fig. 3.45)

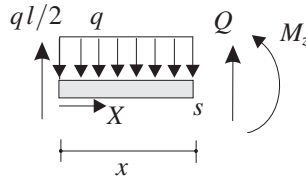


Fig. 3.45

$$ql/2 + Q = qx$$

$$Q = q \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

x	Q	x	M
0	$-ql/2 \uparrow \downarrow$	0	0
$l/2$	0	l	0
l	$ql/2 \downarrow \uparrow$	$l/2$	$ql^2/8 \quad (\curvearrowright)$

vèrtex

Fig. 3.46

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = q \frac{l}{2} x$$

$$M_z = q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2}$$

$M_z(x)$ és una paràbola amb vèrtex a

$$M'_z = q \frac{l}{2} - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$$M_z \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{8}$$

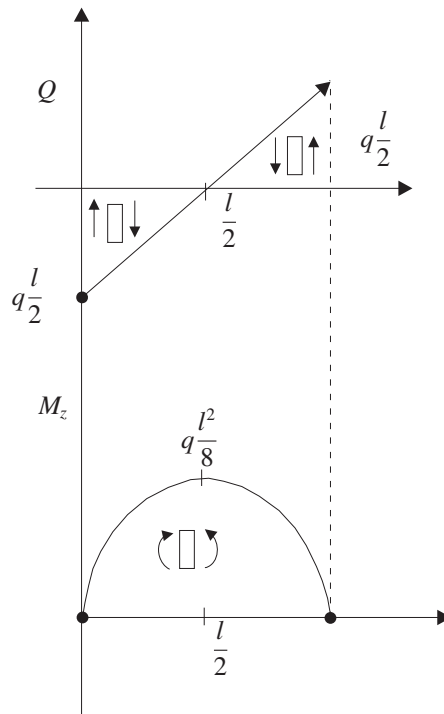


Observem que el vèrtex de la gràfica de moments coincideix amb el punt on l'esforç de cisallament és zero

$$M'_z\left(\frac{l}{2}\right) = 0 = Q\left(\frac{l}{2}\right)$$

Els diagrames d'esforços els tenim a la figura 3.47

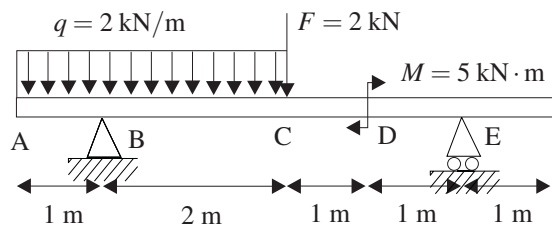
Fig. 3.47



Problema 3.9

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.48.

Fig. 3.48



Solució:

Les reaccions i les regions a estudiar les tenim dibuixades a la figura 3.49, aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura

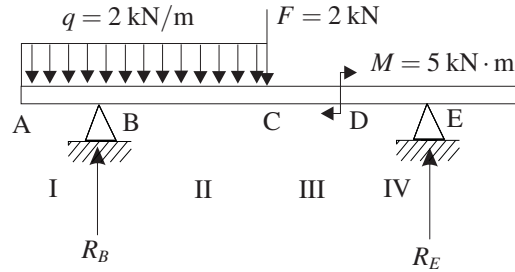


Fig. 3.49

$$R_B = 5 \quad R_E = 3$$

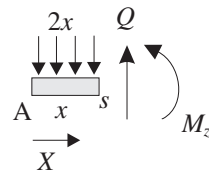


Fig. 3.50

Fem un tall dins de cada una de les regions. Regió I, entre A i B (fig. 3.50), $0 < x < 1$.

$$Q = 2x$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 2 \frac{x^2}{2} = 0$$

$$M_z = -x^2$$

Donant valors a x ,

$$A : Q(0) = 0 \quad B : Q(1) = 2 \quad \downarrow \uparrow \quad A : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(1) = -1 \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Regió II, entre B i C (fig. 3.51), $1 < x < 3$

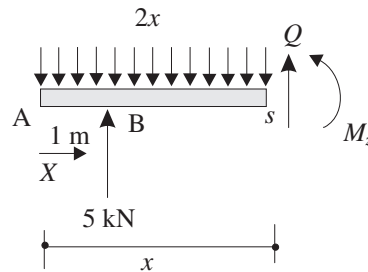


Fig. 3.51

$$2x = 5 + Q$$

$$Q = 2x - 5$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow 2x \frac{x}{2} + M_z = 5 \cdot (x - 1) \quad -x^2 + 5x - 5 = M_z$$

$$\text{Vèrtex} \quad M'_z(x) = -2x + 5 = 0 \quad \rightarrow x = 2.5$$



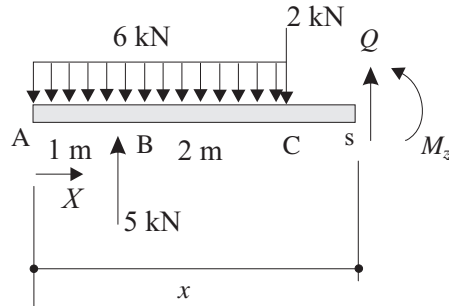
Donant valors a x ,

$$B : Q(1) = -3 \uparrow \downarrow \quad C : Q(3) = 1 \downarrow \uparrow$$

$$B : M_z(1) = -1 \curvearrowright \curvearrowleft \quad M(2,5) = 1,25 \curvearrowleft \curvearrowright \quad C : M_z(3) = 1 \curvearrowleft \curvearrowright$$

Regió III, entre C i D, fig. 3.52, $3 < x < 4$

Fig. 3.52



$$Q + 5 = 2 + 6 \quad Q = 3 \downarrow \uparrow$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow 6 \cdot (x - 1,5) + 2 \cdot (x - 3) + M_z = 5 \cdot (x - 1)$$

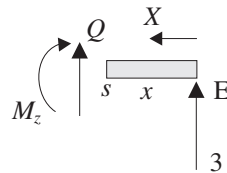
$$M_z = -3x + 10$$

Donant valors a x ,

$$C : M_z(3) = 1 \curvearrowleft \curvearrowright \quad D : M_z(4) = -2 \curvearrowright \curvearrowleft$$

Regió IV, entre D i E (fig. 3.53, $0 < x < 1$)

Fig. 3.53



$$Q = -3 \downarrow \uparrow$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = 3x$$

Donant valors a x ,

$$E : M_z(0) = 0 \quad D : M_z(1) = 3 \curvearrowleft \curvearrowright$$

Els diagrames d'esforços els tenim a la figura 3.54.

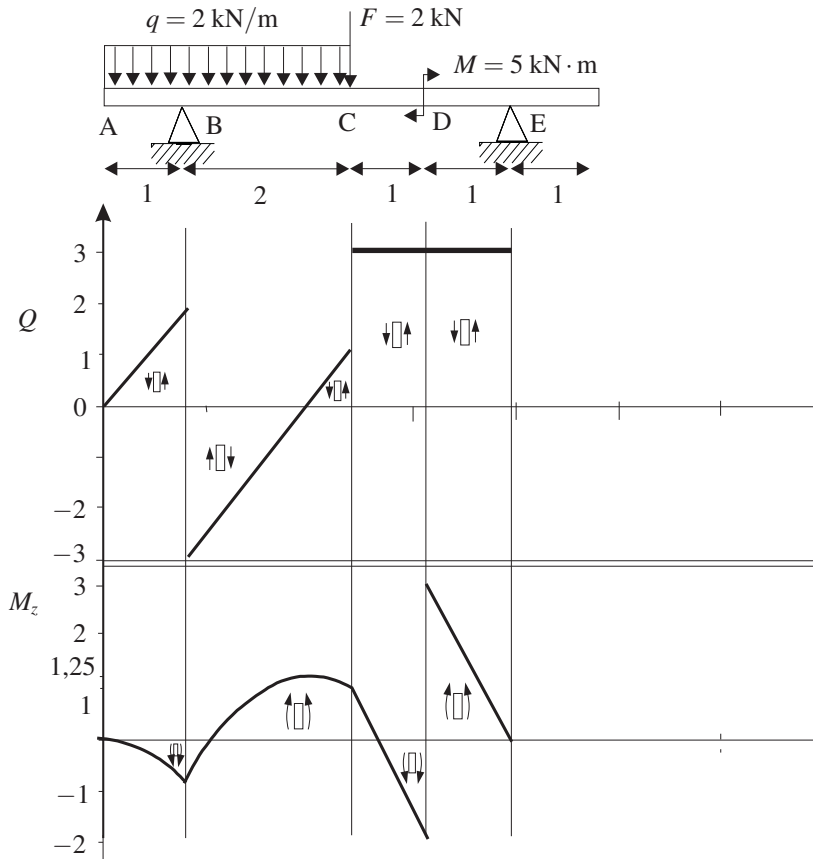


Fig. 3.54

Problema 3.10

Una barra en forma de L invertida, encastada al sòl, suporta en el seu extrem lliure la càrrega d'una força vertical F . Determineu els esforços interns de les parts horitzontals i vertical de la barra (fig. 3.55).

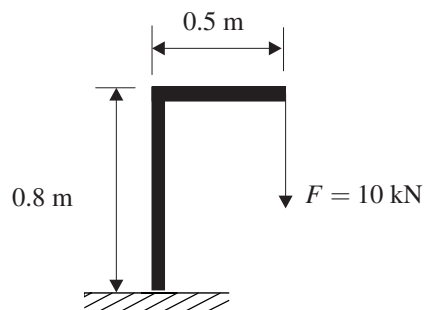


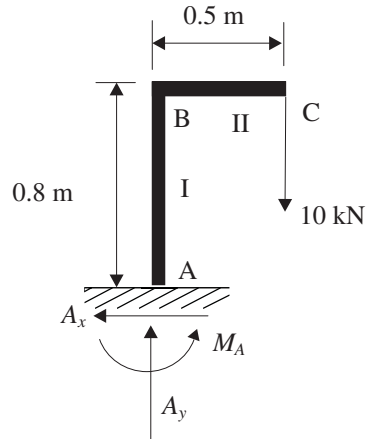
Fig. 3.55

Solució:

Primer, calculem les reaccions externes aplicant l'estàtica a la barra (fig. 3.56)



Fig. 3.56



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

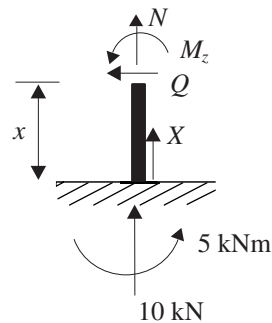
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + R_{Ay} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = 10 \cdot 0.5 \Rightarrow M_A = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

A continuació, establim quines regions diferenciades existeixen a l'hora de determinar els esforços interns. Considerem dues regions: una que va de A a B, que anomenem regió I, i una altra de B a C, que anomenem regió II. Els esforços a les regions seran

Regió I:

Fig. 3.57



Fem un tall dins la regió i en separem el tros de baix (fig. 3.57). Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q = 0$$

$$N = -10 \text{ kN} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \uparrow \end{array}$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -5 \text{ kN} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \square \\ \curvearrowleft \end{array}$$

essent el domini per a les x : $0 < x < 0,8$



Regió II:

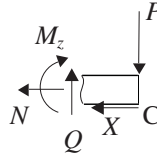


Fig. 3.58

Fem un tall dins de la regió i en separem el tros de la dreta (fig. 3.58). Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q = 10 \text{ kN} \uparrow \downarrow$$

$$N = 0$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -10x$$

essent el domini per a les x : $0 < x < 0,5$. Donant valors a la x , obtenim

$$C : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(0,5) = -5 \text{ kNm} \quad \curvearrowright$$

Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.59)

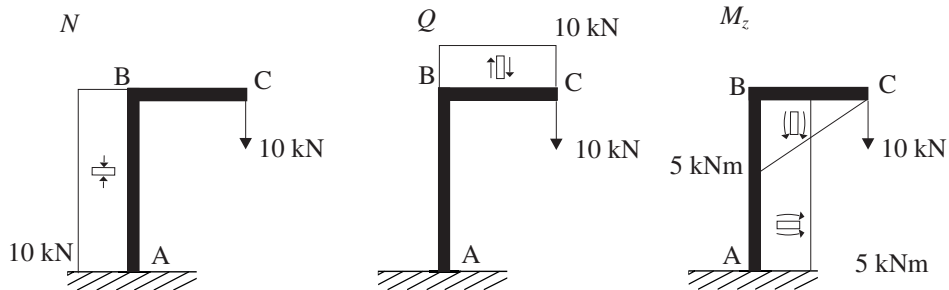


Fig. 3.59

Observant les gràfiques, podem analitzar els esforços al voltant de la secció B (fig. 3.60)

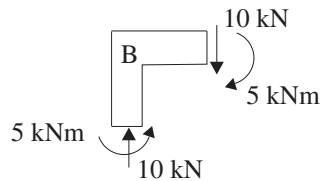


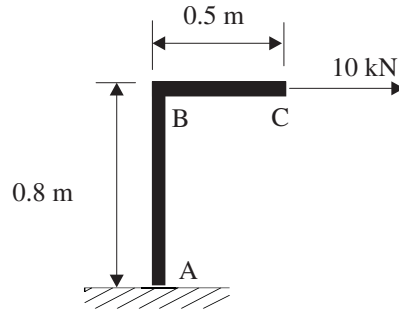
Fig. 3.60

Problema 3.11

Una barra en forma de L invertida, encastada al terra, suporta en el seu extrem lliure la càrrega d'una força horitzontal F . Determineu-ne els esforços interns (fig. 3.61).



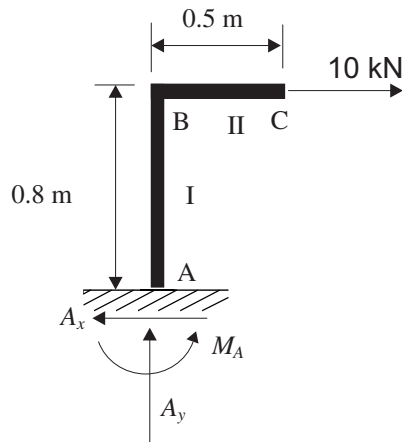
Fig. 3.61



Solució:

Primer, calculem les reaccions externes aplicant l'estàtica a la barra (fig. 3.62)

Fig. 3.62



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 10 \text{ kN}$$

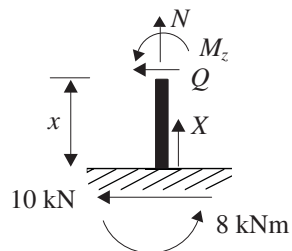
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = 10 \cdot 0,8 \Rightarrow M_A = 8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

A continuació, establim quines regions diferenciades existeixen a l'hora de determinar els esforços interns. Considerem dues regions: una que va de A a B, que anomenem regió I, i una altra de B a C, que anomenem regió II. Els esforços a les regions seran

Regió I:

Fig. 3.63





Fem un tall dins la regió i en separem el tros de baix (fig. 3.63). Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q + 10 \text{ kN} = 0 \Rightarrow Q = -10 \text{ kN} \quad \overleftrightarrow{\square}$$

$$N = 0$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -8 \text{ kN} \quad \overleftrightarrow{\square}$$

essent el domini per a les x : $0 < x < 0,8$

Regió II:

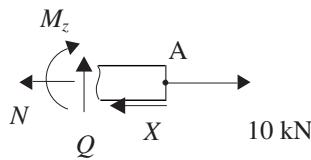


Fig. 3.64

Fem un tall dins de la regió i en separem el tros de la dreta (fig. 3.64). Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q = 0$$

$$N = 10 \text{ kN} \quad \overleftrightarrow{\square}$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = 0$$

essent el domini per a les x : $0 < x < 0,5$. Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.65)

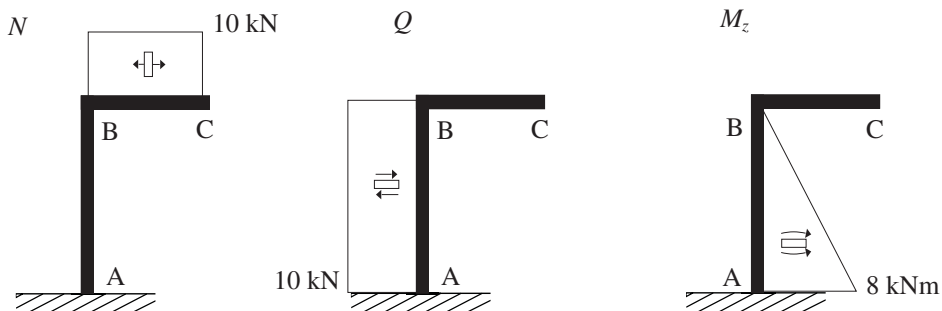


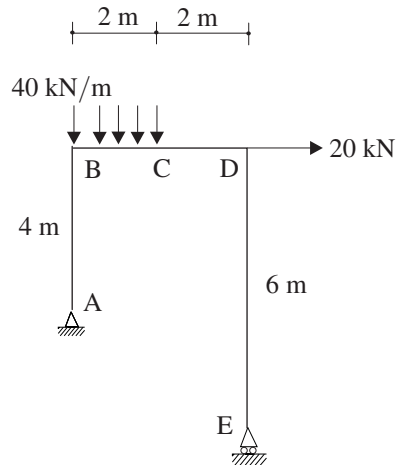
Fig. 3.65

Problema 3.12

Trobeu els esforços interns de l'estructura següent i representeu-los gràficament (fig. 3.66).



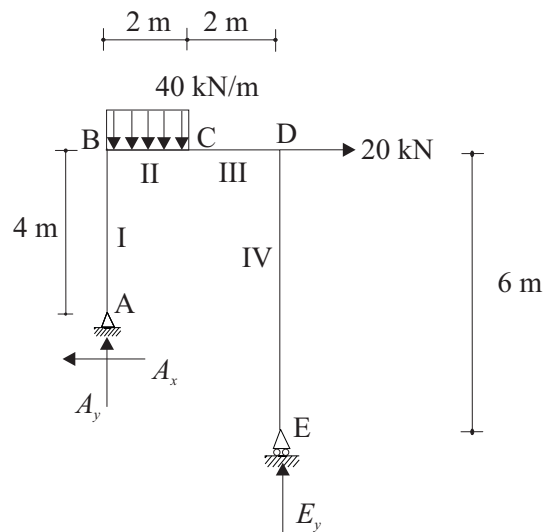
Fig. 3.66



Solució:

A la figura 3.67, es mostren les regions a estudiar i les reaccions. Aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura,

Fig. 3.67



$$A_y + D_y = 80$$

$$A_x = 20$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 80 \cdot 1 + 20 \cdot 4 = D_y \cdot 4 \rightarrow D_y = 40$$

d'on

$$A_y = 40$$

A la regió I (fig. 3.68), el domini és $0 < x < 4$. Aplicant l'equilibri, obtenim

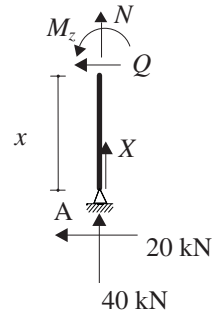


Fig. 3.68

$$Q + 20 = 0 \rightarrow Q = -20 \quad \leftarrow$$

$$N + 40 = 0 \rightarrow N = -40 \quad \downarrow$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = 20x$$

Donant valors a x ,

$$A : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(4) = 80 \quad \curvearrowright$$

A la regió II (fig. 3.69), el domini és $0 < x < 2$. Aplicant l'equilibri, obtenim

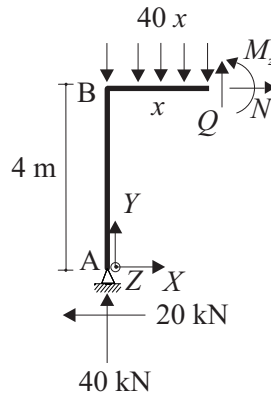


Fig. 3.69

$$N = 20 \quad \leftarrow \rightarrow$$

$$40 + Q = 40x \rightarrow Q = 40x - 40$$

$$\sum M_s = 0 \rightarrow 40x \frac{x}{2} + M_z = 40x + 20 \cdot 4 \rightarrow M_z = -20x^2 + 40x + 80$$

Donant valors a x ,

$$\begin{aligned} B : Q(0) &= -40 \quad \uparrow \downarrow & C : Q(2) &= 40 \quad \downarrow \uparrow \\ B : M_z(0) &= 80 \quad \curvearrowright \curvearrowleft & C : M_z(2) &= 80 \quad \curvearrowleft \curvearrowright \end{aligned}$$



el vèrtex l'obtenim fent $M'_z = 0$

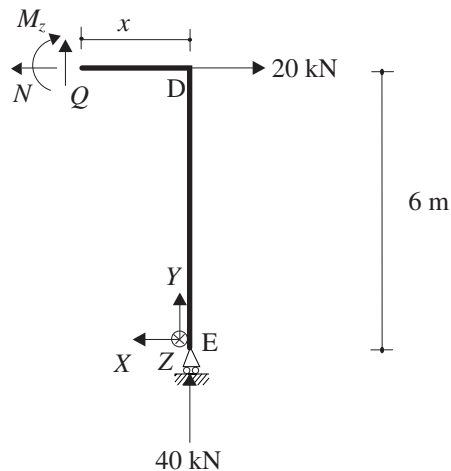
$$-40x + 40 = 0 \rightarrow x = 1$$

el moment corresponent en el vèrtex és

$$M_z(1) = 100$$

A la regió III (fig. 3.70), el domini és $0 < x < 2$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.70



$$N = 20 \quad \leftarrow \boxed{\rightarrow}$$

$$Q = -40 \quad \downarrow \boxed{\uparrow}$$

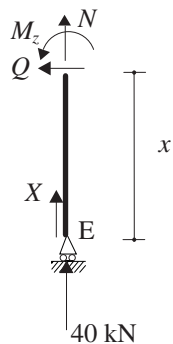
$$\sum M_s = 0 \rightarrow M_z = 40x$$

Donant valors a x ,

$$D : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(2) = 80 \quad \curvearrowright \boxed{\curvearrowleft}$$

A la regió IV (fig. 3.71), el domini és $0 < x < 6$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.71



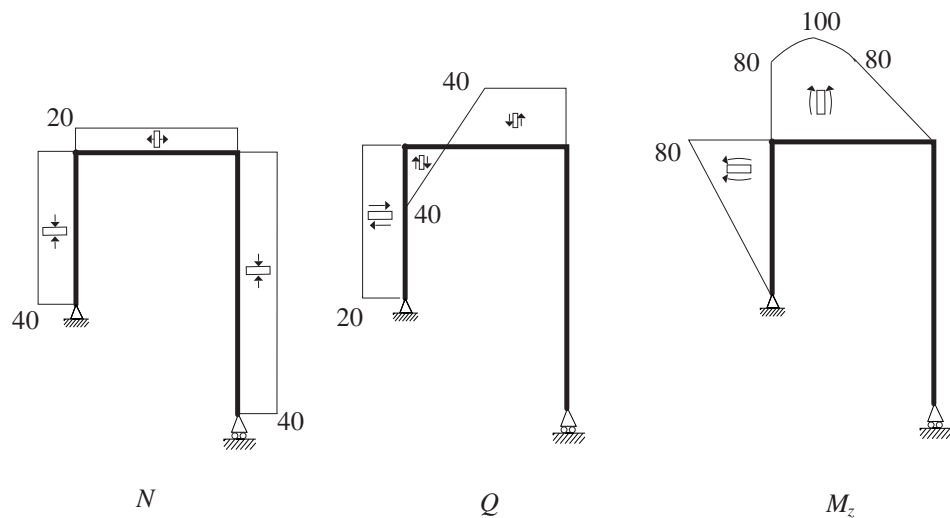


$$N = -40$$

$$Q = 0$$

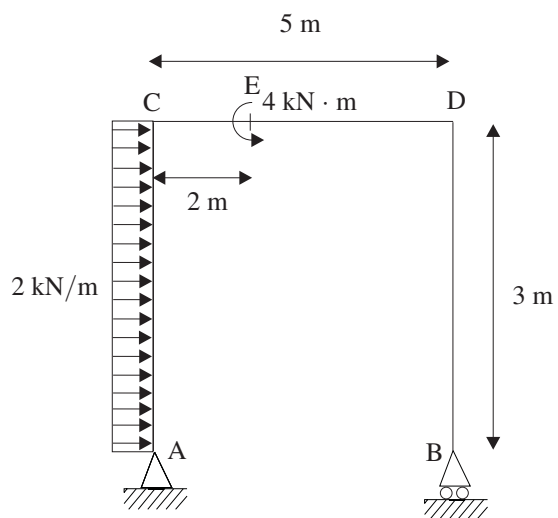
$$\sum M_s = 0 \rightarrow M_z = 0$$

Les gràfiques dels esforços les tenim a la figura 3.72



Problema 3.13

Trobeu els esforços interns de l'estructura següent i representeu-los gràficament (fig. 3.73).

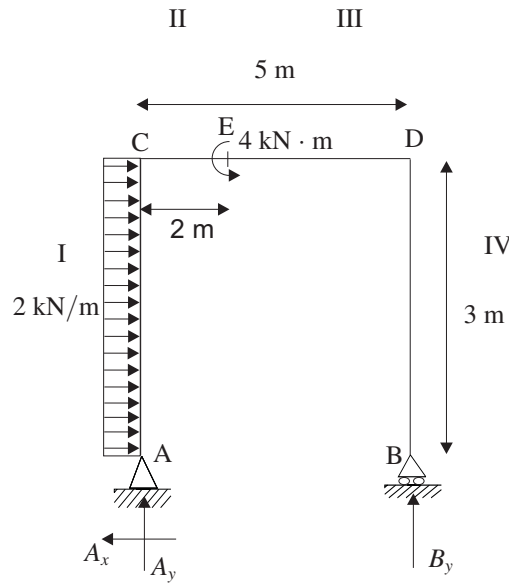




Solució:

A la figura 3.74, es mostren les regions a estudiar i les reaccions. Aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura,

Fig. 3.74



$$A_x = 6 \text{ kN}$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$6 \cdot 1.5 = B_y \cdot 5 + 4$$

d'on

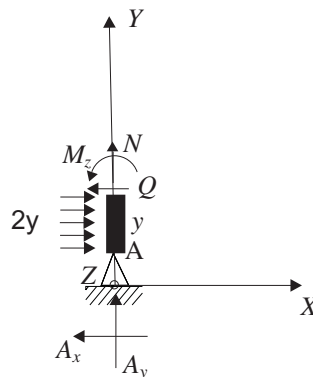
$$A_x = 6 \text{ kN}$$

$$B_y = 1 \text{ kN}$$

$$A_y = -1 \text{ kN}$$

A la regió I (fig. 3.75), el domini és $0 < x < 3$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.75





$$Q + 6 = 2y \rightarrow Q = 2y - 6$$

$$N = 1 \text{ kN} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{array}$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow 6y = 2yy/2 + M_z \rightarrow M_z = 6y - y^2$$

$$M'_z = 0 \rightarrow y = 3$$

Donant valors a y ,

$$A : Q(0) = -6 \text{ kN} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \\ \leftarrow \end{array} \quad C : Q(3) = 0$$

$$A : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(3) = 9 \text{ kNm} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \square \\ \curvearrowleft \end{array}$$

A la regió II (fig. 3.76), el domini és $0 < x < 2$. Aplicant l'equilibri, obtenim

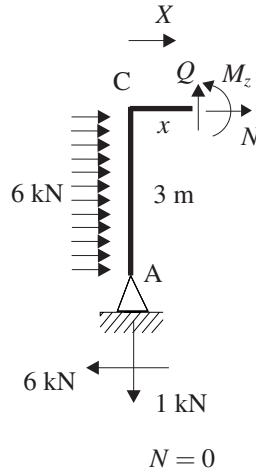


Fig. 3.76

$$N = 0$$

$$Q = 1 \text{ kN} \quad \begin{array}{c} \downarrow \square \uparrow \end{array}$$

$$6 \cdot 1,5 + M_z + 1 \cdot x = 6 \cdot 3 \rightarrow M_z = 9 - x$$

Donant valors a x ,

$$C : M_z(0) = 9 \text{ kNm} \quad \begin{array}{c} \curvearrowleft \square \curvearrowright \end{array} \quad E : M_z(2) = 7 \text{ kNm} \quad \begin{array}{c} \curvearrowleft \square \curvearrowright \end{array}$$

A la regió III (fig. 3.77), el domini és $0 < x < 3$. Aplicant l'equilibri, obtenim

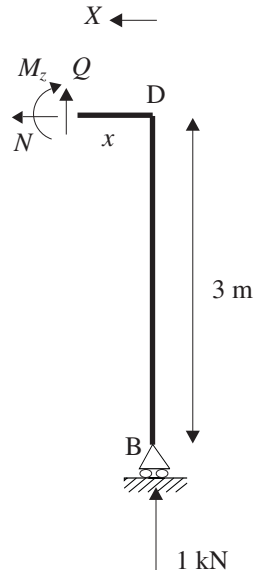
$$N = 0$$

$$Q = -1 \text{ kN} \quad \begin{array}{c} \downarrow \square \uparrow \end{array}$$

$$M_z = 1 \cdot x$$



Fig. 3.77

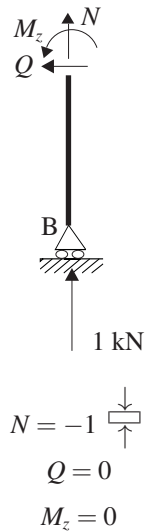


Donant valors a x ,

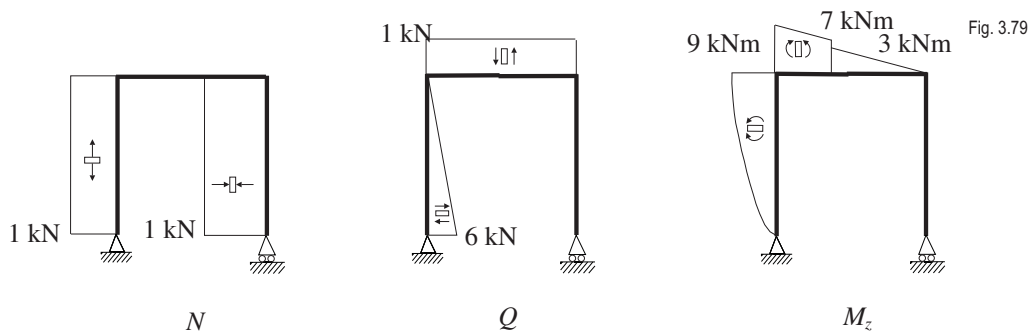
$$D : M_z(0) = 0 \quad \curvearrowright \quad E : M_z(3) = 3 \text{ kNm} \quad \curvearrowright$$

A la regió IV (fig. 3.78), el domini és $0 < x < 3$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.78

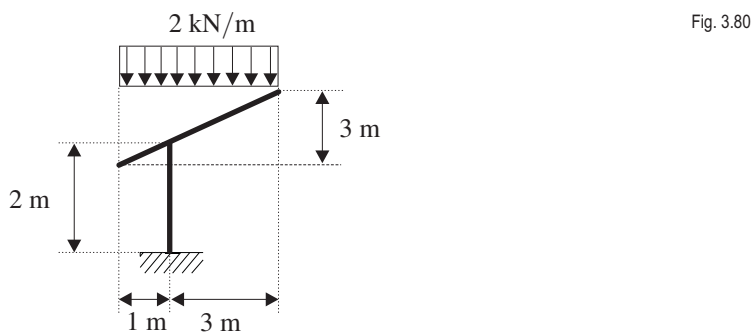


Les gràfiques dels esforços les tenim a la figura 3.79.



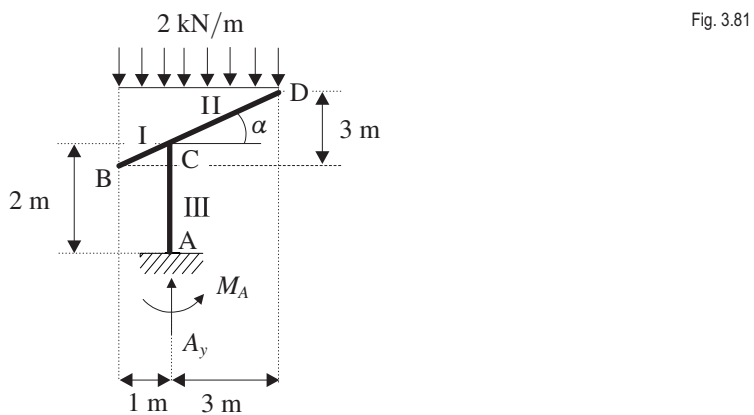
Problema 3.14

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.80.



Solució:

Per les dimensions donades, $\alpha = 36,86^\circ$. Aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura (fig. 3.81),



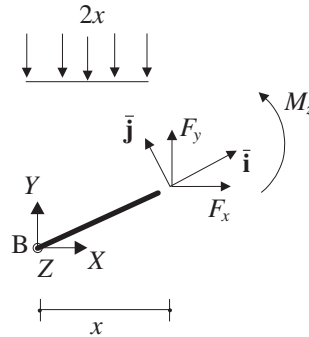
$$A_y = 8 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = 8 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 8 \text{ kNm}$$



Fem ara l'anàlisi de les regions. A la regió I (fig. 3.82),

Fig. 3.82



$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 36,86^\circ, \sin 36,86^\circ)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (-\sin 36,86^\circ, \cos 36,86^\circ)$$

Aplicant l'equilibri,

$$F_x = 0 \quad F_y = 2x$$

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = 2x \sin 36,86^\circ$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = 2x \cos 36,86^\circ$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + \frac{2x^2}{2} = 0 \quad M_z = -x^2$$

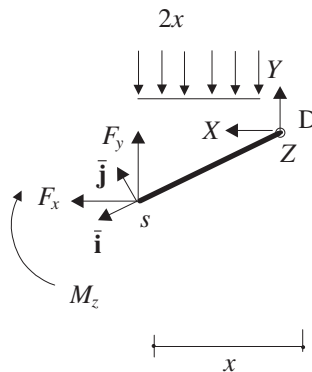
A la figura 8.33, tenim els valors per representar les gràfiques dels esforços

Fig. 3.83

	x	N	x	Q	x	M	
B:	0	0	0	0	0	0	→ vèrtex
C:	1	1,2	1	1,6 ↓ ↑	1	-1	(□)

A la regió II (fig. 3.84),

Fig. 3.84



$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 36,86^\circ, -\sin 36,86^\circ)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (\sin 36,86^\circ, \cos 36,86^\circ)$$

Aplicant l'equilibri,

$$F_x = 0 \quad F_y = 2x$$

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = -(2x \sin 36,86^\circ)$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = 2x \cos 36,86^\circ$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -x^2$$

A la figura 3.85, tenim els valors per representar les gràfiques dels esforços

	x	N	x	Q	x	M_z
D:	0	0	0	0	0	0 → vèrtex
C:	3	-3,6	3	4,8	3	-9

Fig. 3.85

A la regió III (fig. 3.86), aplicant l'equilibri,

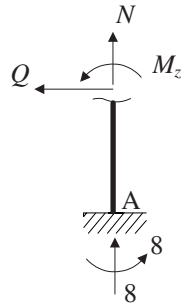


Fig. 3.86

$$N = -8 \text{ kN} \quad Q = 0 \quad \sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -8 \text{ kNm}$$

Els diagrames d'esforços són els de les figures 3.87.

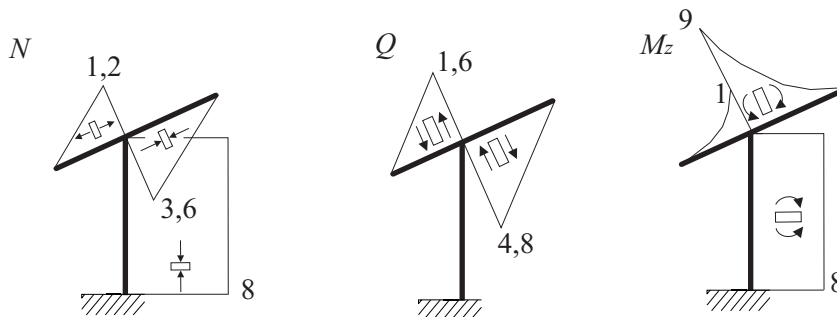


Fig. 3.87



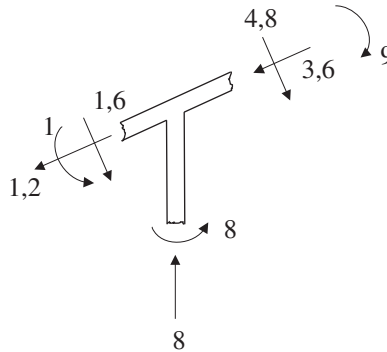
Podem observar que el nus C està en equilibri (fig. 3.88)

$$\Sigma F_y \rightarrow 8 \cos 36,86^\circ = 1,6 + 4,8$$

$$\Sigma F_x \rightarrow 4,79 = 3,6 + 1,2$$

$$\Sigma M_z \rightarrow 8 + 1 = 9$$

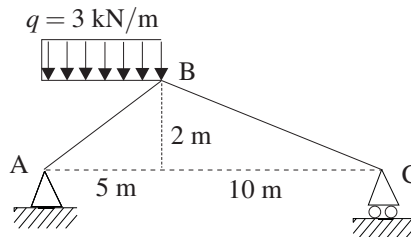
Fig. 3.88



Problema 3.15

Trobeu els esforços interns de l'estructura següent i representeu-los gràficament (fig. 3.89).

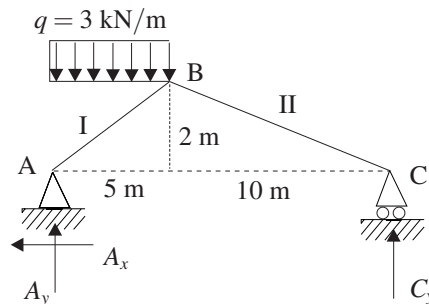
Fig. 3.89



Solució:

Aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura,

Fig. 3.90





$$A_x = 0$$

$$A_y + C_y = 15$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 15 \cdot 2,5 = C_y \cdot 15 \Rightarrow C_y = 2,5 \text{ kN}$$

i, per tant

$$A_y = 15 - 2,5 = 12,5 \text{ kN}$$

Fem ara l'anàlisi de les regions. A la regió I (fig. 3.91), el domini és $0 < x < 5$.

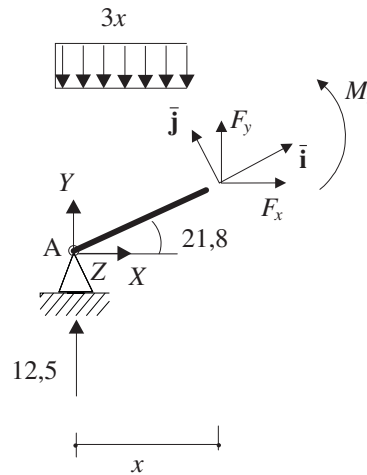


Fig. 3.91

$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 21,8^\circ, \sin 21,8^\circ)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (-\sin 21,8^\circ, \cos 21,8^\circ)$$

Aplicant l'equilibri,

$$F_x = 0 \quad F_y + 12,5 = 3x \quad \rightarrow F_y = 3x - 12,5 \quad \mathbf{F} = (0, 3x - 12,5)$$

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = (3x - 12,5) \sin 21,8^\circ$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = (3x - 12,5) \cos 21,8^\circ$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + \frac{3x^2}{2} = 12,5x \quad M_z = 12,5x - 1,5x^2$$

Donant valors a x ,

$$A : N(0) = -4,64 \text{ kN} \quad B : N(5) = 0,93 \text{ kN}$$

$$A : Q(0) = -11,6 \text{ kN} \quad B : Q(5) = 2,3 \text{ kN}$$

$$A : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(5) = 25 \text{ kNm}$$



L'equació de moments és de segon grau, per tant, la gràfica és una paràbola; el vèrtex el trobem fent $M' = 0$

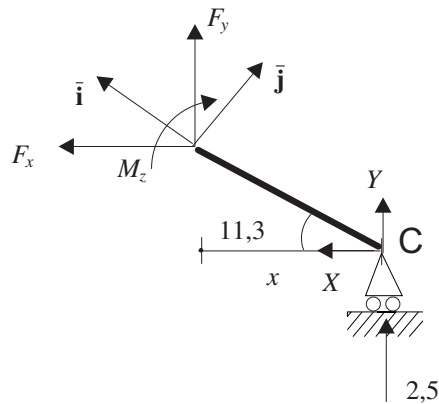
$$M'_z = 12,5 - 3x = 0 \Rightarrow x = 4,16$$

el moment corresponent és

$$M_z(4,16) = 26 \text{ kNm}$$

A la regió II (fig. 3.92), el domini és $0 < x < 10$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.92



$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 11,3^\circ, \sin 11,3^\circ)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (-\sin 11,3^\circ, \cos 11,3^\circ)$$

Aplicant l'equilibri,

$$F_x = 0 \quad F_y = -2,5$$

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = -2,5 \sin 11,3^\circ = -0,48 \text{ kN} \quad \text{⌘}$$

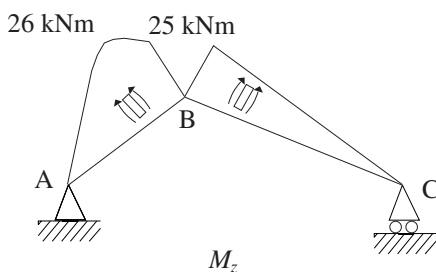
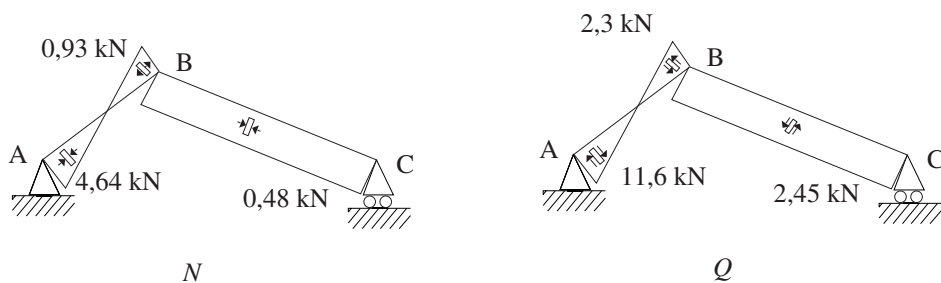
$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = -2,5 \cos 11,3^\circ = -2,45 \text{ kN} \quad \text{⌘}$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = 2,5x$$

Donant valors a x ,

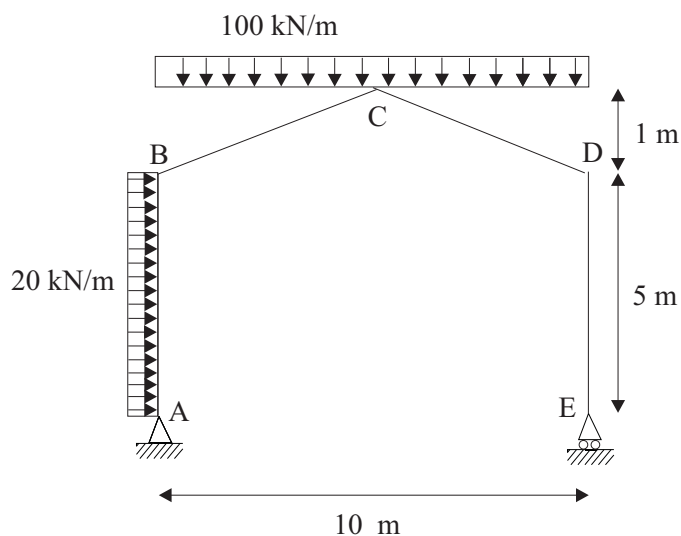
$$C : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(10) = 25 \text{ kNm} \quad \text{⌘}$$

Les gràfiques dels esforços, les tenim a la figura 3.93.



Problema 3.16

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.94.

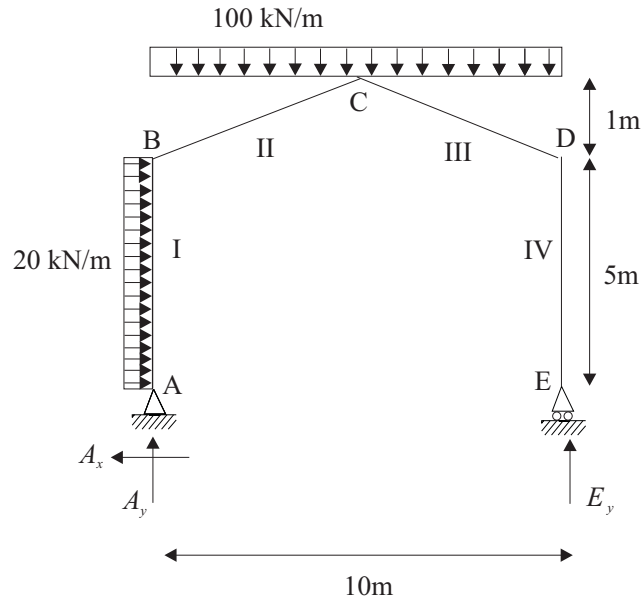


Solució:

A la figura 3.95, es mostren les regions a estudiar i les reaccions. Aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura,



Fig. 3.95



$$1.000 = A_y + E_y$$

$$100 = Ax$$

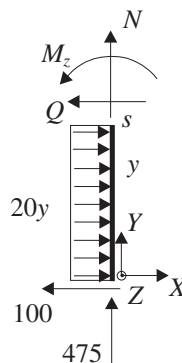
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 100 \cdot 2,5 + 100 \cdot 5 = E_y \cdot 10$$

$$E_y = \frac{5.250}{10} = 525$$

$$A_y = 1.000 - 525 = 475$$

A la regió I (fig. 3.96), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.96



$$Q + 100 = 20y \rightarrow Q = 20y - 100$$

$$N + 475 = 0 \rightarrow N = -475$$

$$\Sigma M_s = 0 \Rightarrow 100y = 10y^2 + M_z \rightarrow M_z = 100y - 10y^2$$

$$M'_z = 0 \rightarrow y = 5$$



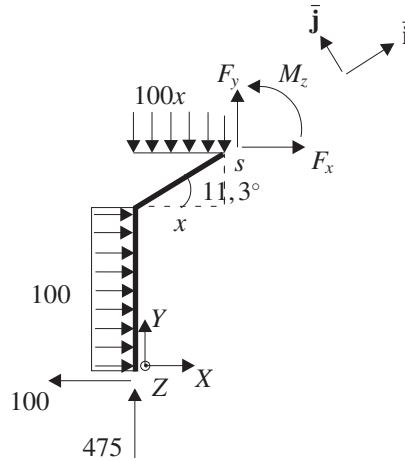
Donant valors a x ,

$$A : Q(0) = -100 \quad B : Q(5) = 0$$

$$A : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(5) = 250$$

A la regió II (fig. 3.97), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.97



$$100 = 100 + F_x \rightarrow F_x = 0$$

$$100x = 475 + F_y \rightarrow F_y = 100x - 475$$

$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 11,3^\circ, \sin 11,3^\circ) = (0,98, 0,19)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (-0,19, 0,98)$$

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = (100x - 475) \cdot 0,19 = 19x - 90,25$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = (100x - 475) \cdot 0,98 = 98x - 465,5$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 50x^2 + 100(2,5 + 0,2x) - 100(5 + 0,2x) - 475x = 0$$

$$M_z = -50x^2 + 250 + 475x \rightarrow$$

el vèrtex el trobem fent

$$M'_z = -100x + 475 = 0 \rightarrow 475 = 100x \rightarrow x = 4,75$$

Donant valors a x ,

$$B : N(0) = -90,25 \quad C : N(5) = 4,75$$

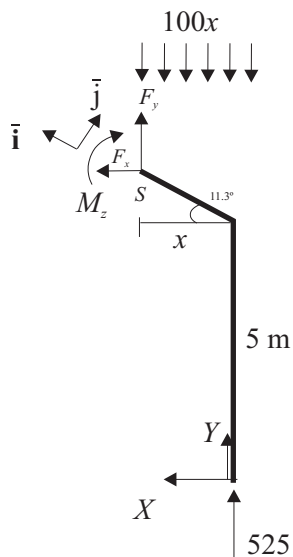
$$B : Q(0) = -465,5 \quad C : Q(5) = 24,5$$

$$B : M_z(0) = 250 \quad C : M_z(5) = 1375$$



A la regió III (fig. 3.98), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.98



$$F_x = 0$$

$$100x = 525 + F_y$$

$$\bar{\mathbf{i}} = (0,98, 0,19)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (-0,19, 0,98)$$

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = (100x - 525) 0,19 = 19x - 99,75$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = (100x - 525) 0,98 = 98x - 514,5$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 100 \frac{x^2}{2} = 525x$$

$$M_z = -50x^2 + 525x$$

$$M'_z = -100x + 525 \rightarrow x = 5,25$$

Donant valors a x ,

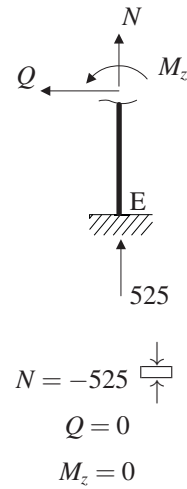
$$D : N(0) = -99,75 \quad C : N(5) = -4,75$$

$$D : Q(0) = -514 \quad C : Q(5) = -24,5$$

$$D : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(5) = 1.375$$

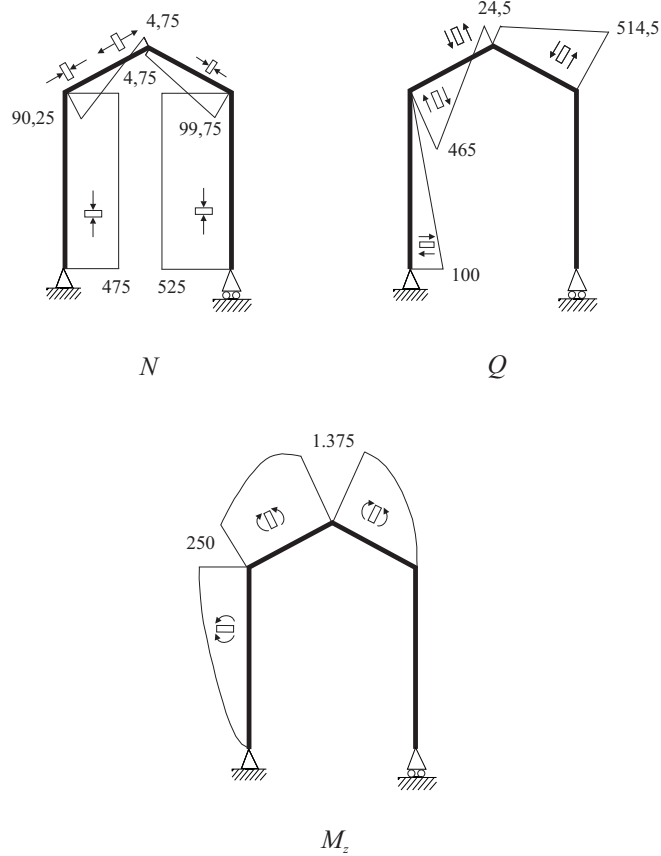
A la regió IV (fig. 3.99), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.99



Les gràfiques dels esforços, les tenim a la figura 3.100.

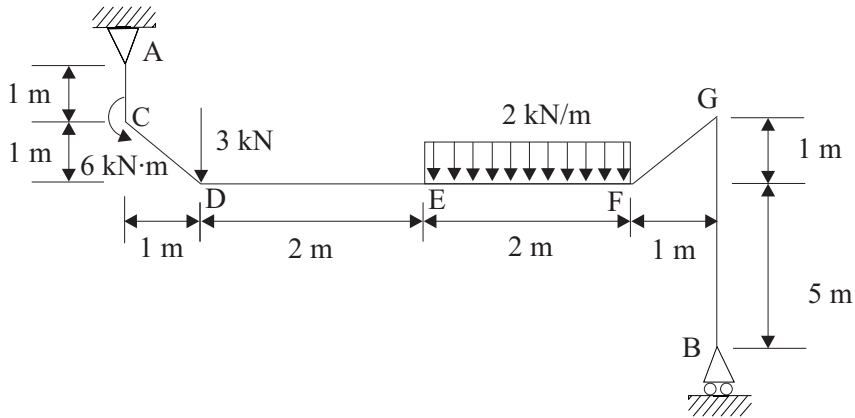
Fig. 3.100



Problema 3.17

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.101.

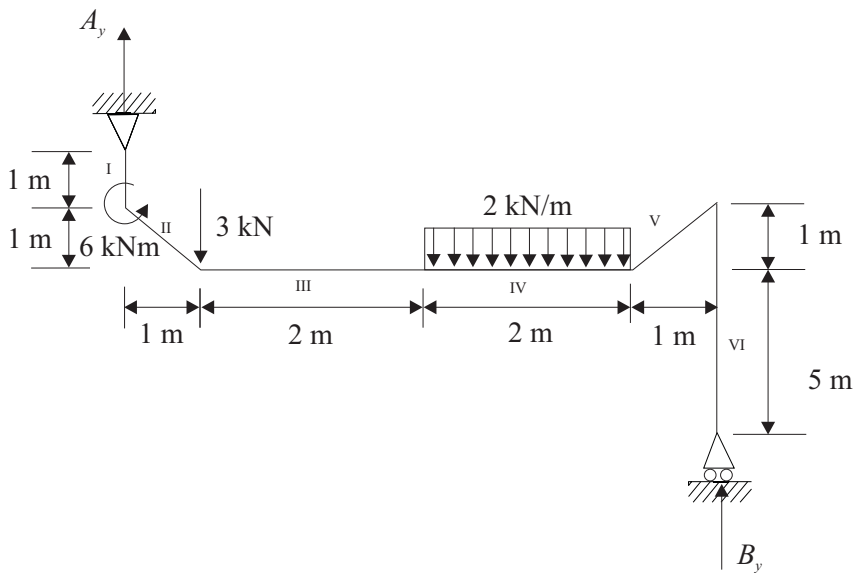
Fig. 3.101



Solució:

A la figura 3.102, hi ha dibuixades les reaccions exteriors i les regions a estudiar. Aplicant l'estàtica al conjunt,

Fig. 3.102



$$A_y + B_y = 7$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6 + B_y \cdot 6 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19$$

Resolent el sistema obtenim

$$B_y = 2,16 \quad A_y = 4,84$$

Regió I. Fent un tall dins la regió i aplicant l'estàtica, obtenim (fig. 3.103)

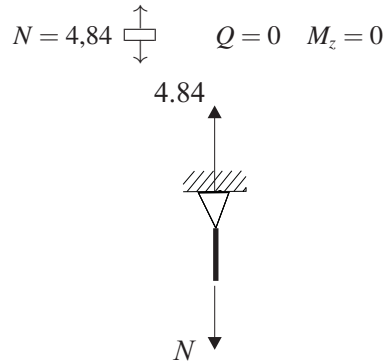


Fig. 3.103

Regió II. És dibuixada a la figura 3.104, on $0 < x < 1$. Aplicant l'estàtica, obtenim

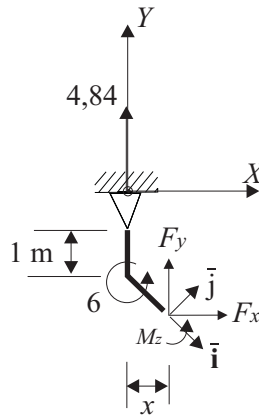


Fig. 3.104

$$F_x = 0 \quad F_y = -4,84$$

Tenint en compte que els vectors unitaris normal i tangencial són, respectivament,

$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 45^\circ, -\sin 45^\circ)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (\sin 45^\circ, \cos 45^\circ)$$

tindrem per a l'esforç normal N ,

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = -4,84 \cdot (-\sin 45^\circ) = 3,4$$

i, per a l'esforç de cisallament Q ,

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = -4,84 \cdot \cos 45^\circ = -3,4$$



Aplicant l'equilibri de moments respecte al punt on fem el tall

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow 4,84x = 6 + M_z$$

d'on

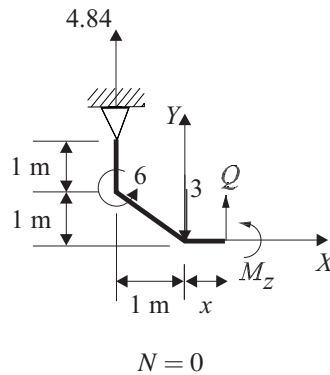
$$M_z = 4,84x - 6$$

Donant valors a x ,

$$C : M_z(0) = -6 \quad \curvearrowright \quad D : M_z(1) = -1,16 \quad \curvearrowright$$

Regió III. És dibuixada a la figura 3.105, on $0 < x < 2$. Aplicant l'estàtica, obtenim

Fig. 3.105



$$4,84 + Q = 3 \Rightarrow Q = -1,84 \quad \uparrow \downarrow$$

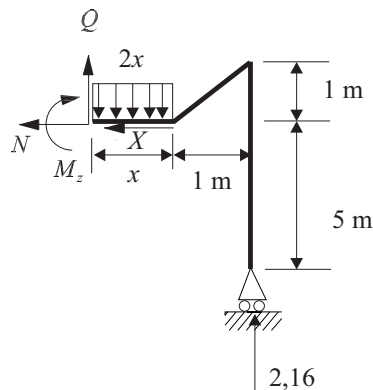
$$\sum M_s = 0 \Rightarrow 6 + M_z + 3x = 4,84(1+x) \Rightarrow M_z = 1,84x - 1,16$$

Donant valors a x ,

$$D : M_z(0) = -1,16 \quad \curvearrowright \quad E : M_z(2) = 2,52 \quad \curvearrowright$$

Regió IV. És dibuixada a la figura 3.106, on $0 < x < 2$. Aplicant l'estàtica, obtenim

Fig. 3.106





$$N = 0$$

$$Q + 2,16 = 2x \Rightarrow Q = 2x - 2,16$$

Donant valors a x ,

$$F : Q(0) = -2,16 \downarrow \uparrow \quad E : Q(2) = 1,84 \uparrow \downarrow$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 2x \frac{x}{2} = 2,16(1+x) \Rightarrow M_z = 2,16 + 2,16x - x^2$$

Donant valors a x ,

$$F : M_z(0) = 2,16 \curvearrowright \quad E : M_z(2) = 2,52 \curvearrowright$$

i, com que es tracta d'una paràbola, és convenient localitzar-ne el vèrtex

$$M'_z = 0 \Rightarrow x = 1,08 \quad M_z(1,08) = 3,32 \curvearrowright$$

Regió V. És dibuixada a la figura 3.107, on $0 < x < 1$. Aplicant l'estàtica, obtenim

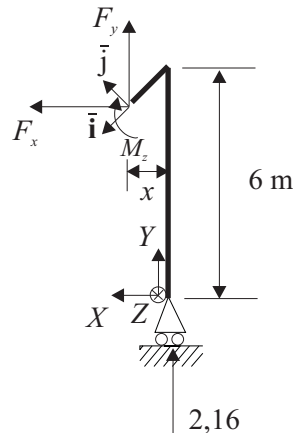


Fig. 3.107

$$F_x = 0 \quad F_y = -2,16$$

Tenint en compte que els vectors unitaris normal i tangencial són, respectivament,

$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 45^\circ, -\sin 45^\circ)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (\sin 45^\circ, \cos 45^\circ)$$

tindrem, per a l'esforc normal N ,

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = 2,16 \cdot \sin 45^\circ = 1,52 \quad \nearrow \searrow$$



i, per a l'esforç de cisallament Q ,

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = -2,16 \cdot \cos 45^\circ = -1,52 \quad \text{N}$$

Aplicant l'equilibri de moments respecte al punt on fem el tall

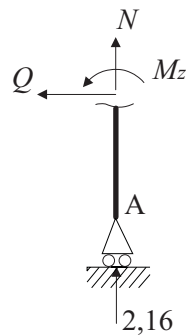
$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = 2,16x$$

Donant valors a x ,

$$G : M_z(0) = 0 \quad F : M_z(1) = 2,16 \quad \text{N}\cdot\text{m}$$

Regió VI. És dibuixada a la figura 3.108. Aplicant l'estàtica, obtenim

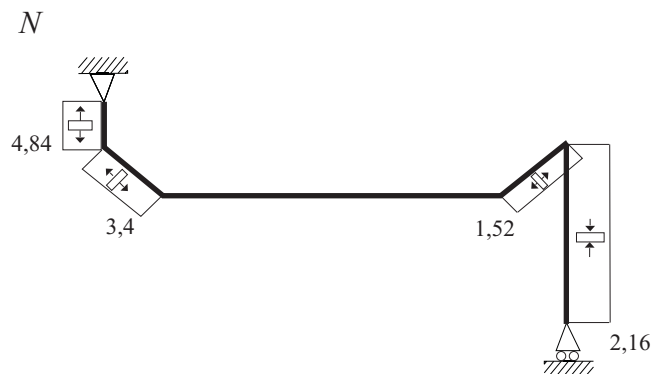
Fig. 3.108

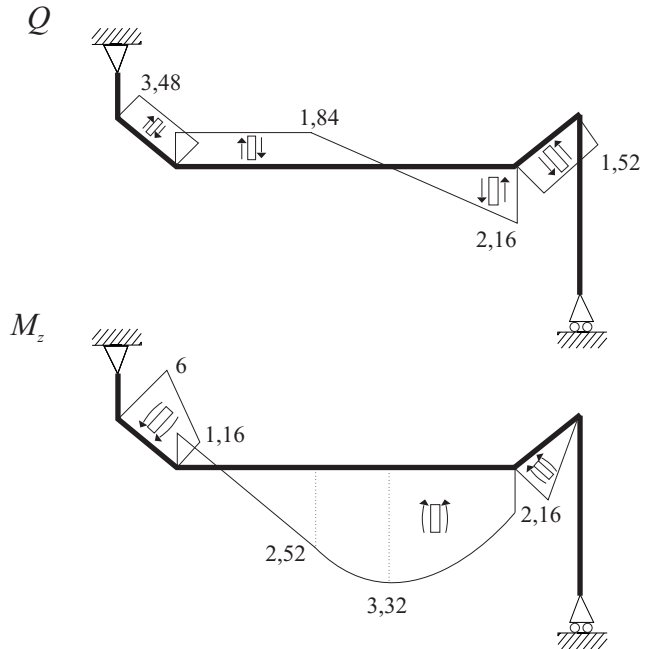


$$N = -2,16 \quad \text{N} \quad Q = 0 \quad M_z = 0$$

Les gràfiques dels esforços, les tenim a la figura 3.109

Fig. 3.109





Problema 3.18

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.110.

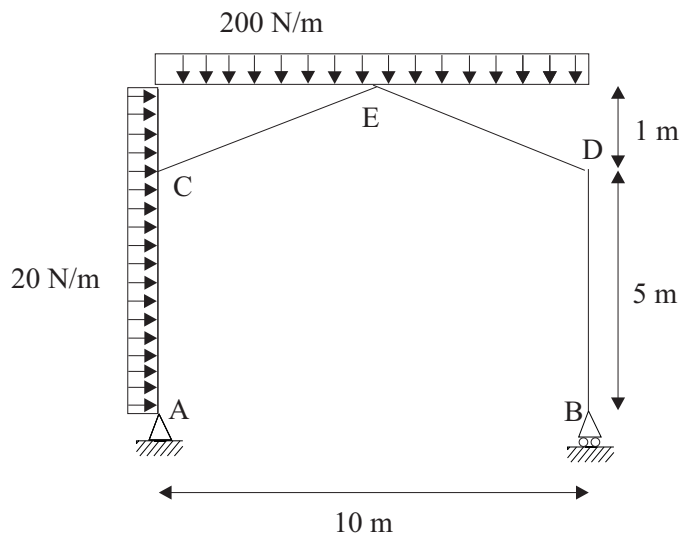


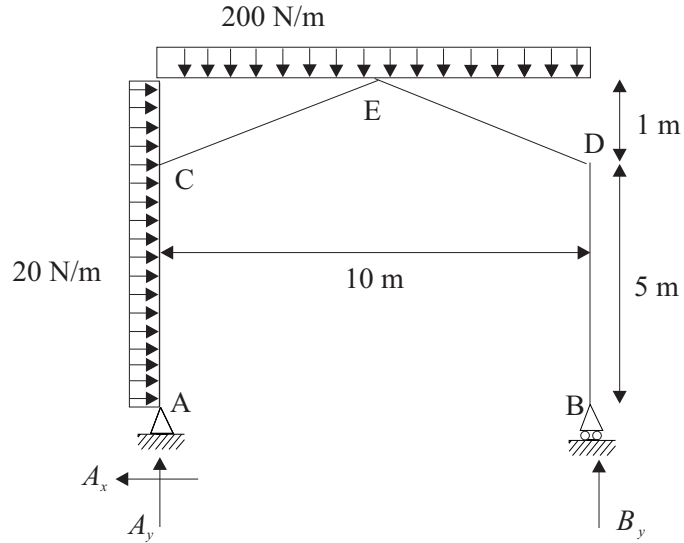
Fig. 3.110

Solució:

Calquem les reaccions externes aplicant l'estàtica al conjunt (fig. 3.111)



Fig. 3.111



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 120 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 2.000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot 10 = 2.000 \cdot 5 + 120 \cdot 3$$

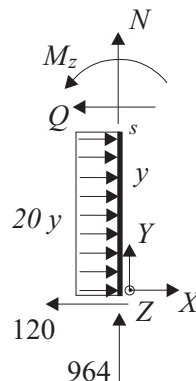
d'on

$$A_x = 120 \text{ N} \quad A_y = 964 \text{ N} \quad B_y = 1.036 \text{ N}$$

Establim ara quines regions diferenciades existeixen a l'hora de determinar els esforços interns. Considerem quatre regions: una que va de A a C, que anomenem regió I, una de C a E, que anomenem regió II, una de E a D, que anomenem regió III i una de D a B, que anomenem regió IV.

Regió I

Fig. 3.112





Fem un tall dins la regió i en separem el tros de baix (fig. 3.112). Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q + 120 = 20y \Rightarrow Q = 20 \cdot y - 120$$

$$N = -964 \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \uparrow \end{array}$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 10y^2 = 120y \Rightarrow M_z = 120y - 10y^2$$

essent el domini per a les y : $0 < y < 5$. Com que el moment és una equació de segon grau, el gràfic és una paràbola. En trobem el vèrtex per tal de facilitar el dibuix, derivant l'equació de moments i igualant a 0

$$M' = 120 - 20 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 6$$

Donant valors a y ,

$$A : Q(0) = -120 \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \square \\ \Leftarrow \end{array} \quad C : Q(5) = -20 \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \square \\ \Leftarrow \end{array}$$

$$A : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(5) = 350 \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \square \\ \curvearrowleft \end{array}$$

Regió II

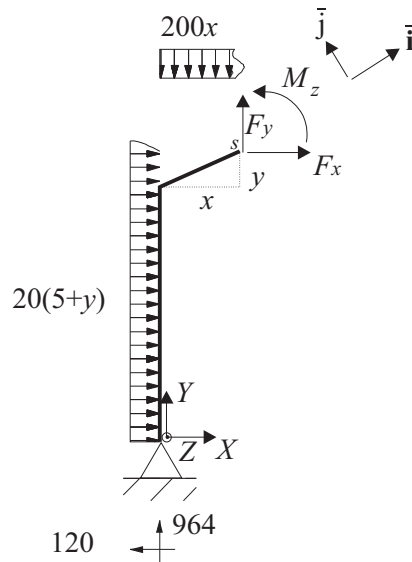


Fig. 3.113

Fem un tall dins de la regió i en separem el tros de l'esquerra (fig. 3.113). L'angle α és

$$\tan \alpha = \frac{1}{5} = 0,2 \Rightarrow \alpha = 11,3^\circ$$

El vector unitari $\bar{\mathbf{i}}$ tangent a la directriu de la barra, que servirà per calcular la tensió normal, és



$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 11,3^\circ, \sin 11,3^\circ)$$

i el vector unitari $\bar{\mathbf{j}}$, que servirà per calcular la tensió de cisallament,

$$\bar{\mathbf{j}} = (-\sin 11,3^\circ, +\cos 11,3^\circ)$$

Aplicant les equacions d'equilibri, s'obté

$$F_x + 20(5 + 0,2x) = 120$$

$$F_x = -4x + 20$$

$$964 + F_y = 200x$$

i, per tant,

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = 35,27x - 169,28$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = 196,9x - 949,23$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 20(5 + 0,2x) \frac{(5 + 0,2x)}{2} + 200x \frac{x}{2} = 120(5 + 0,2x) + 964x$$

$$M_z = -100,4x^2 + 968x + 350$$

essent el domini per a les x : $0 < x < 5$. El vèrtex és a $x = 4,82$. Donant valors a x ,

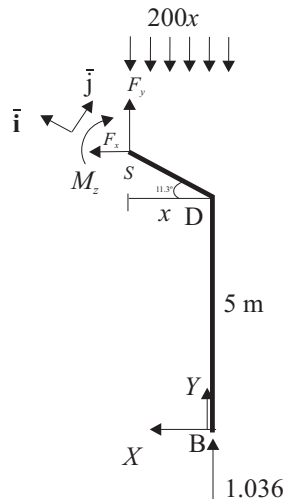
$$C : N(0) = -169 \quad E : N(5) = 7$$

$$C : Q(0) = -949 \quad E : Q(5) = 35$$

$$C : M_z(0) = 350 \quad E : M_z(5) = 2.680$$

Regió III

Fig. 3.114





Fem un tall dins de la regió I i en separem el tros de la dreta (fig. 3.114). L'angle α és el mateix que el de la regió II. El vector unitari $\bar{\mathbf{i}}$ tangent a la directriu de la barra, que servirà per calcular la tensió normal, és

$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 11,3^\circ, \sin 11,3^\circ)$$

i el vector unitari $\bar{\mathbf{j}}$, que servirà per calcular la tensió de cisallament,

$$\bar{\mathbf{j}} = (-\sin 11,3^\circ, \cos 11,3^\circ)$$

Aplicant les equacions d'equilibri s'obté

$$F_x = 0$$

$$F_y = 200 \cdot x - 1.036$$

i, per tant,

$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = 39,2x - 203$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = 196x - 1.015$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 200x \frac{x}{2} = 1.036x$$

$$M_z = -100x^2 + 1.036x$$

essent el domini per a les x : $0 < x < 5$. El vèrtex és a $x = 5,18$. Donant valors a x ,

$$D : N(0) = -203 \quad \swarrow \quad E : N(5) = -7 \quad \swarrow$$

$$D : Q(0) = -1.015 \quad \swarrow \quad E : Q(5) = -35 \quad \swarrow$$

$$D : M_z(0) = 0 \quad E : M_z(5) = 2.680 \quad \curvearrowright$$

Regió IV

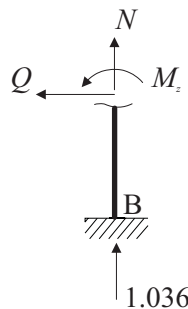


Fig. 3.115

Fem un tall dins la regió I i en separem el tros de baix (fig. 3.115). Aplicant l'estàtica, tenim

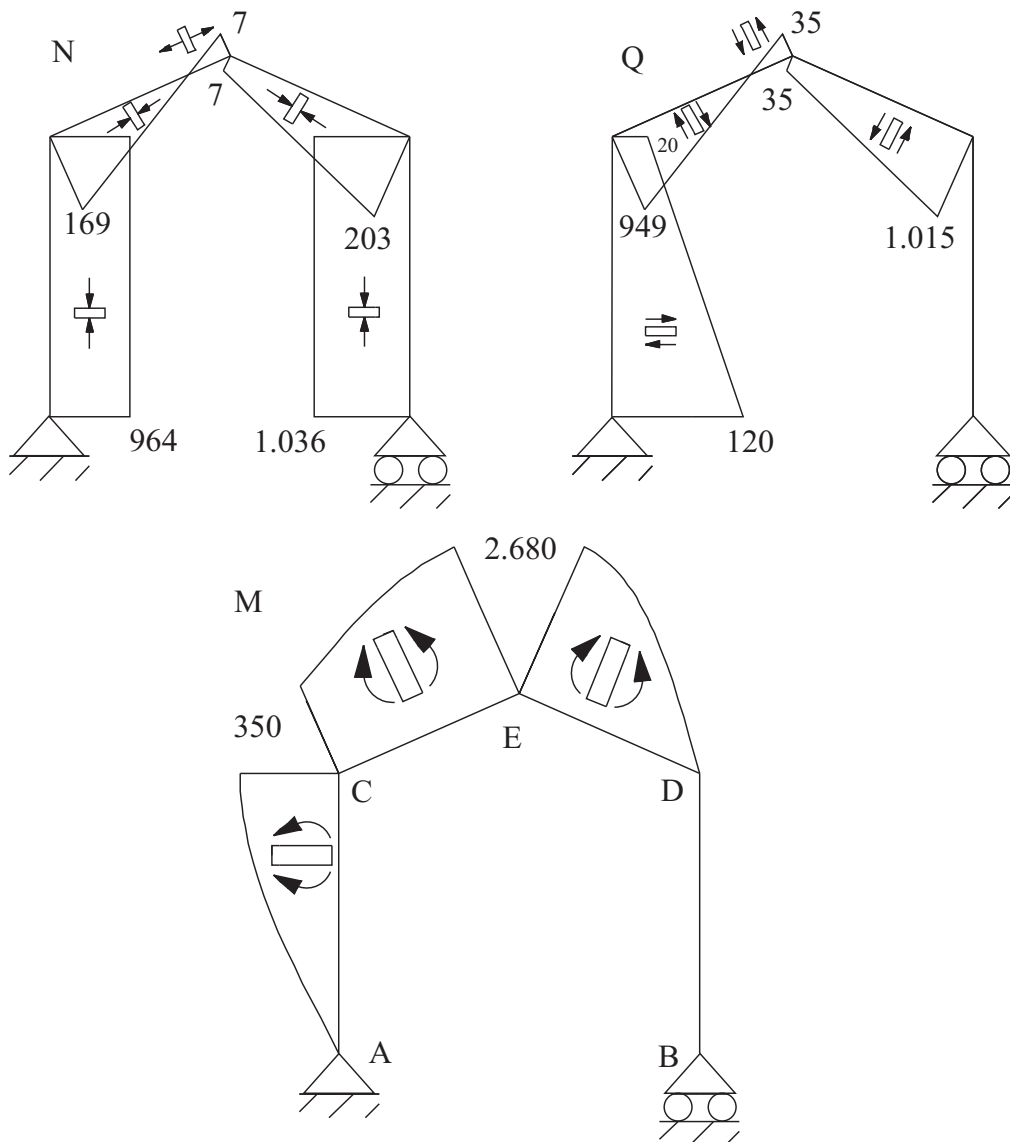
$$Q = 0$$

$$N = -1.036 \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array}$$

$$M_z = 0$$

essent el domini per a les x : $0 < x < 5$. Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.116)

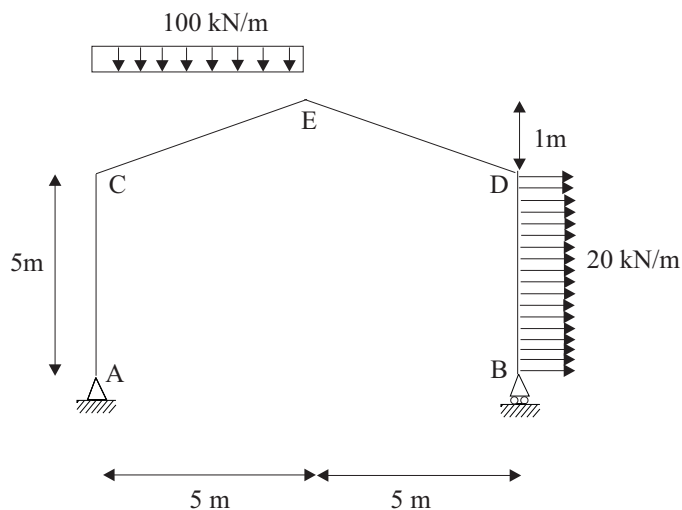
Fig. 3.116





Problema 3.19

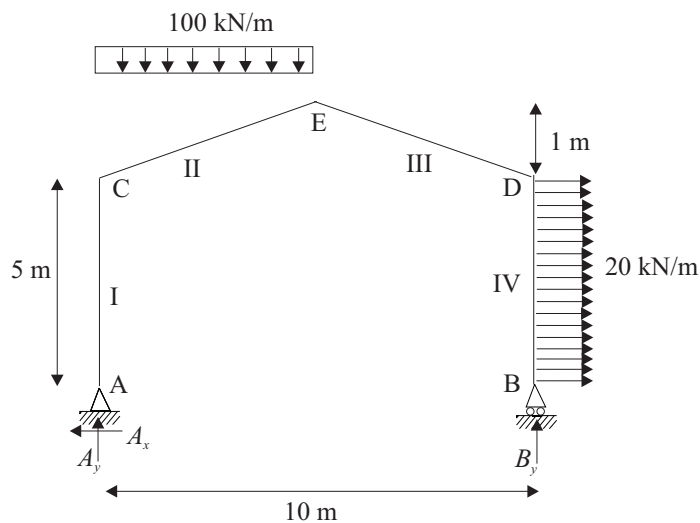
Trobeu els esforços interns de l'estructura següent i representeu-los gràficament (fig. 3.117).



Solució:

A la figura 3.118, es mostren les regions a estudiar i les reaccions. Aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura,

Fig. 3.118



$$500 = A_y + B_y$$

$$100 = A_x$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 100 \cdot 2,5 + 500 \cdot 2,5 = B_y \cdot 10$$

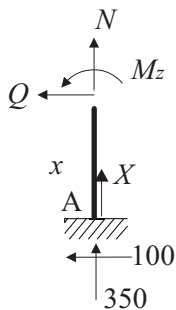
$$B_y = 150$$

$$A_y = 375$$



A la regió I (fig. 3.119), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.119



$$Q + 100 = 0 \rightarrow Q = -100 \quad \overleftrightarrow{\square}$$

$$N + 350 = 0 \rightarrow N = -350 \quad \overleftrightarrow{\square}$$

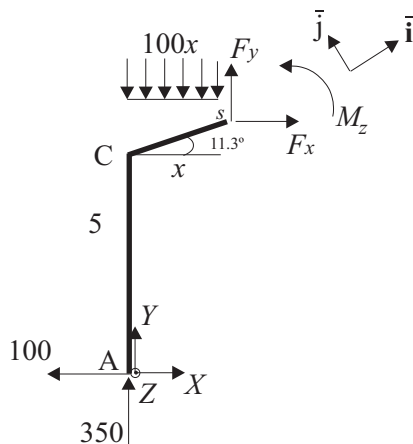
$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = 100x$$

Donant valors a x ,

$$A : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(5) = 500 \quad \overleftrightarrow{\square}$$

A la regió II (fig. 3.120), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.120



$$F_x = 100$$

$$100x = 350 + F_y \rightarrow F_y = 100x - 350$$

$$\mathbf{F} = (100x - 350)\mathbf{j}$$

$$\bar{\mathbf{i}} = (\cos 11,3^\circ, \sin 11,3^\circ) = (0,98, 0,19)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = (-0,19, 0,98)$$



$$N = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{i}} = 19,61x + 29,42$$

$$Q = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{j}} = 98,06x - 362,81$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z + 100x \frac{x}{2} = 100(5 + \tan 11,3x) + 350x$$

$$M_z = -50x^2 + 370x + 500$$

el vèrtex, el trobem fent

$$M'_z = -100x + 370 = 0 \rightarrow x = 3,7$$

Donant valors a x ,

$$C : N(0) = 29,4 \quad E : N(5) = 127,4$$

$$C : Q(0) = -362,5 \quad E : Q(5) = 127,5$$

$$C : M_z(0) = 500 \quad E : M_z(5) = 1.100$$

$$M_z(3,7) = 1.184$$

A la regió III (fig. 3.121), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

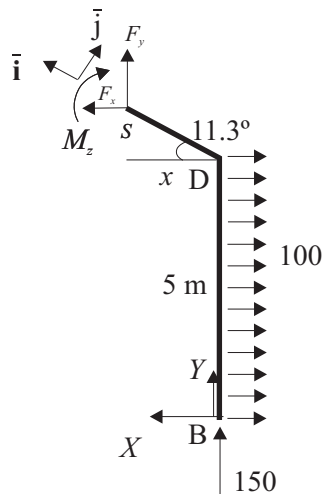


Fig. 3.121

$$F_x = 100$$

$$F_y + 150 = 0$$

$$\mathbf{F} = (100, -150)$$

$$\bar{\mathbf{i}} = (0,98, 0,19)$$



$$\bar{\mathbf{j}} = (-0,19, 0,98)$$

$$N = 100 \cdot 0,98 - 150 \cdot 0,19 = 68,6 \quad \swarrow \searrow$$

$$Q = 100 \cdot (-0,19) - 150 \cdot 0,98 = -166,7 \quad \swarrow \searrow$$

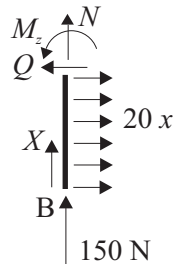
$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = 150x + 100(2,5 + x \tan 11,3) = 170x + 250$$

Donant valors a x ,

$$D : M_z(0) = 250 \quad \curvearrowright \quad E : M_z(5) = 1.100 \quad \curvearrowright$$

A la regió IV (fig. 3.122), el domini és $0 < x < 5$. Aplicant l'equilibri, obtenim

Fig. 3.122



$$N = -150 \quad \uparrow \downarrow$$

$$Q = 20x$$

$$M_z + 20x \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M_z = -10x^2$$

el vèrtex, el trobem fent

$$M'_z = -20x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

donant valors a x ,

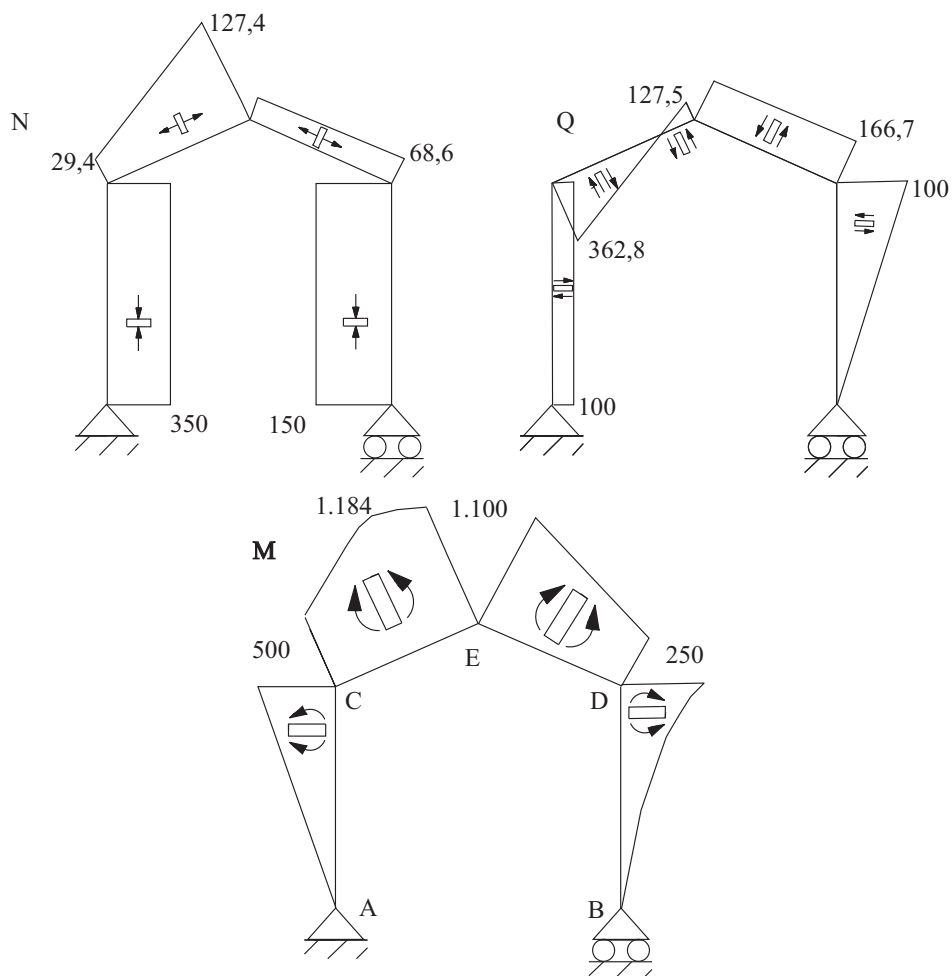
$$B : Q(0) = 0 \quad D : Q(5) = 100 \quad \leftarrow \rightarrow$$

$$B : M_z(0) = 0 \quad D : M_z(5) = -250 \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Les gràfiques dels esforços, les tenim a la figura 3.123.



Fig. 3.123



Problema 3.20

Trobeu les reaccions externes i dibuixeu els diagrames d'esforços de la barra de la figura 3.124.

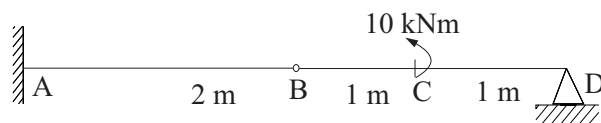
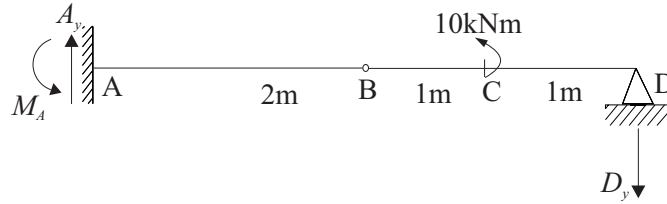


Fig. 3.124

Solució:

Les reaccions estan dibuixades a la figura 3.125

Fig. 3.125



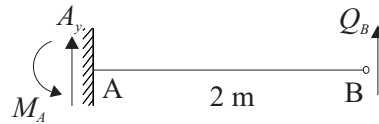
Aplicant les equacions d'equilibri a l'estructura sencera,

$$A_y = D_y$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + 10 = D_y 4$$

Hi ha tres reaccions externes i solament dues equacions d'equilibri per al conjunt de l'estructura; si no hi hagués la ròtula, el problema seria hiperestàtic, però la presència de la ròtula converteix el problema en isostàtic. Fent un tall per la ròtula i aïllant-ne la part dreta (també en podríem aïllar la part esquerra), tenim la figura 3.126. Fixem-nos que al punt B no hi ha moment flector, ja que és la ròtula

Fig. 3.126



$$A_y + Q_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + Q_B 2 = 0$$

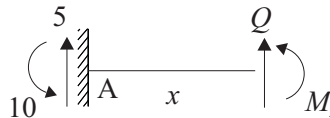
Resolent el sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, obtenim les tres reaccions externes i l'esforç de cisallament a la ròtula

$$A_y = 5 \quad D_y = 5 \quad M_A = 10 \quad Q_B = -5$$

Ara ja podem fer l'anàlisi de les regions. En no haver-hi cap càrrega aplicada a la ròtula, podríem considerar solament dues regions, però per claredat en considerarem tres.

La regió I, entre els punts A i B, la tenim representada a la figura 3.127, on $0 < x < 2$

Fig. 3.127



les equacions d'equilibri són

$$Q = -5 \uparrow \downarrow$$

$$M_z + 10 = 5x \rightarrow M_z = 5x - 10$$

donant valors a la x ,

$$A : M_z(0) = -10 \quad \curvearrowright \quad B : M_z(2) = 0$$

La regió II, entre els punts B i C, la tenim representada a la figura 3.128, on $0 < x < 1$

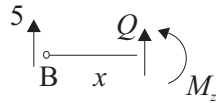


Fig. 3.128

Les equacions d'equilibri són

$$Q = -5 \quad \uparrow \downarrow$$

$$M_z = 5x$$

donant valors a la x ,

$$B : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(1) = 5 \quad \curvearrowright$$

La regió III, entre els punts C i D, la tenim representada a la figura 3.129, on $0 < x < 1$

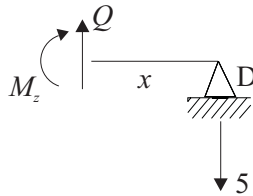


Fig. 3.129

Les equacions d'equilibri són

$$Q = 5 \quad \uparrow \downarrow$$

$$M_z = -5x$$

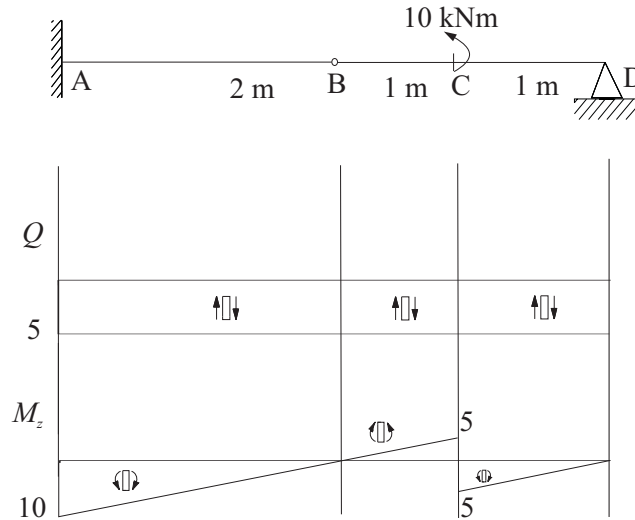
donant valors a la x ,

$$D : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(1) = -5 \quad \curvearrowright$$

Les gràfiques, les tenim representades a la figura 3.130



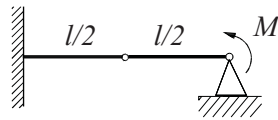
Fig. 3.130



Problema 3.21

Trobeu els esforços interns de l'estructura següent i representeu-los gràficament (fig. 3.131).

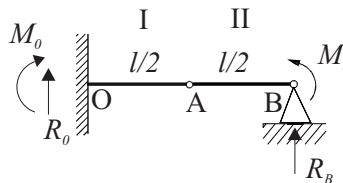
Fig. 3.131



Solució:

Primer apliquem l'estàtica a la barra (fig. 3.132):

Fig. 3.132



$$R_B + R_0 = 0$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow M_0 = M_l + R_B l$$

Observem que tenim tres reaccions externes i tan sols dues equacions de l'estàtica aplicades al conjunt; això vol dir que si no hi hagués algun element intern que desrigiditzés l'estructura, aquesta seria hiperestàtica. La presència de la ròtula a A converteix l'estructura en isostàtica. El procediment per resoldre l'estructura és fer un tall per la ròtula i aplicar l'estàtica a una de les parts (fig. 3.133),

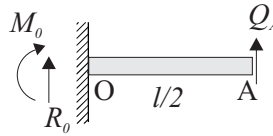


Fig. 3.133

fixem-nos que a la secció A no hi ha moment flector, donat que és una ròtula. Així, les equacions de l'estàtica aplicades a aquesta porció de barra són

$$R_0 + Q_A = 0$$

$$M_0 = Q_A l/2$$

Aquestes dues equacions, ajuntades amb les dues anteriors, formen un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, que són M_0 , R_0 , R_B , Q_A ; per tant, resolent el sistema trobem les tres reaccions externes i l'esforç de cisallament a la ròtula. Els resultats que s'obtenen són

$$R_0 = 2M_l/l \quad M_0 = -M_l \quad R_B = -2M_l/l \quad Q_A = -2M_l/l$$

Un cop tenim l'esforç de cisallament a la ròtula, podem fer l'anàlisi de les regions. A la regió que va de 0 a A l'anomenarem regió I i la que va de A a B, regió II.

Fem un tall dins la regió I i en separem la part de l'esquerra (fig. 3.134).

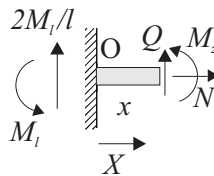


Fig. 3.134

Aplicant l'estàtica,

$$Q = -2M_l/l \quad \uparrow \downarrow$$

$$M_z + M_l = 2 \frac{M_l}{l} x$$

Donant valors a x ,

$$0 : M_z(0) = -M_l \quad A : M_z(l/2) = 0$$

A la regió II,

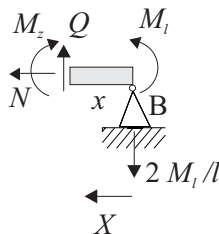


Fig. 3.135



$$Q = 2M_l/l \quad \uparrow \downarrow$$

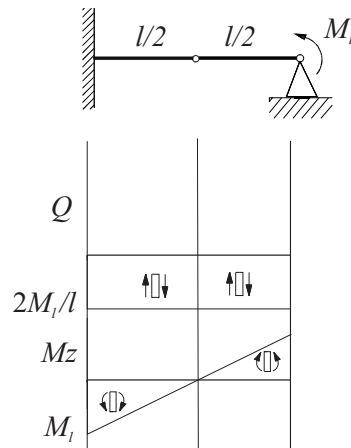
$$M_z = M_l - 2\frac{M_l}{l}x$$

Donant valors a x ,

$$B : M_z(0) = M_l \quad \curvearrowright \quad A : M_z(l/2) = 0$$

Els diagrames d'esforços els tenim a la figura 3.136.

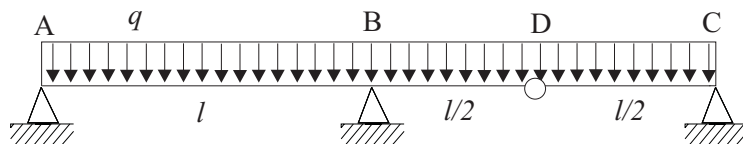
Fig. 3.136



Problema 3.22

Representeu gràficament els esforços de la barra de la figura 3.137.

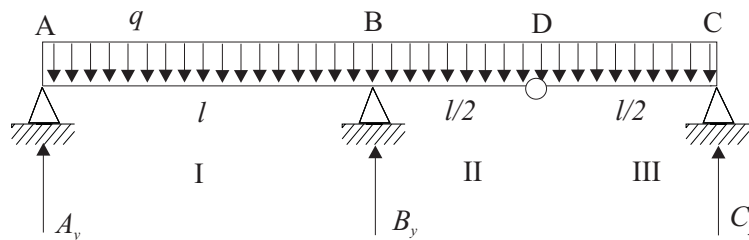
Fig. 3.137



Solució:

Apliquem l'estàtica a la barra per tal de calcular les reaccions externes, que considerem únicament verticals (fig. 3.138).

Fig. 3.138





$$\sum F_y = 0 \Rightarrow q \cdot 2l = A_y + B_y + C_y$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot l + C_y \cdot 2l = q \cdot 2l^2$$

En aquest cas tenim dues equacions amb tres incògnites. L'equació que ens falta l'obtenim fent un tall per la ròtula (fig. 3.139) i aplicant les equacions d'equilibri

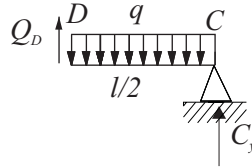


Fig. 3.139

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow q \cdot l/2 = Q_D + C_y$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow q \cdot l/8 - C_y \cdot l/2 = 0$$

Ens apareix una nova incògnita, Q_D , però tenim dues equacions noves. En resum, disposem de quatre equacions amb quatre incògnites. Resolent,

$$A_y = \frac{q \cdot l}{4}$$

$$B_y = \frac{3 \cdot q \cdot l}{2}$$

$$C_y = \frac{q \cdot l}{4}$$

$$Q_D = \frac{q \cdot l}{4}$$

Establim ara quines regions diferenciades existeixen a l'hora de determinar els esforços interns. Considerem tres regions: una que va de A a B, que anomenem regió I; una altra, de B a D, que anomenem regió II i una altra de D a C, que anomenem regió III.

A la regió I, fem un tall i en separem el tros de l'esquerra (fig. 3.140). Aplicant l'estàtica, tenim

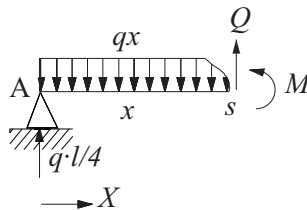


Fig. 3.140

$$Q = q \cdot (x - l/4)$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = q \cdot (l/4 \cdot x - x^2/2)$$

essent el domini per a les x : $0 < x < l$. Com que el moment és una equació de segon grau, el gràfic és una paràbola. Trobem el vèrtex per tal de facilitar-ne el dibuix, derivant l'equació de moments i igualant a 0, $M' = q(l/4 - x) = 0 \Rightarrow x = l/4$.



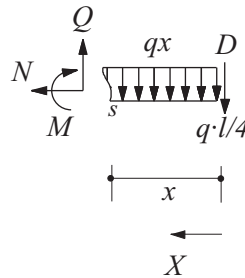
Donant valors a x ,

$$A : Q(0) = -ql/4 \uparrow \downarrow \quad B : Q(l) = 3ql/4 \downarrow \uparrow$$

$$A : M_z(0) = 0 \quad M_z(l/4) = ql^2/32 \curvearrowright \quad B : M_z(l) = -ql^2/4 \curvearrowleft$$

A la regió II, fem un tall i en separem el tros de la dreta fins al punt D (fig. 3.141).
Aplicant l'estàtica tenim

Fig. 3.141



$$Q = q(x + l/4)$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = -q \cdot l/4 \cdot x - q \cdot x^2/2$$

essent el domini per a les x : $0 < x < l/2$. El vèrtex és a $x = -l/4$.

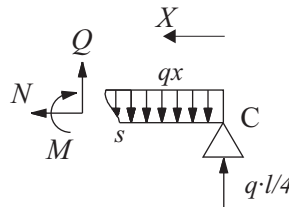
Donant valors a x ,

$$D : Q(0) = ql/4 \uparrow \downarrow \quad B : Q(l/2) = 3ql/4 \uparrow \downarrow$$

$$D : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(l/2) = -ql^2/4 \curvearrowleft$$

A la regió III, fem un tall i en separem el tros de la dreta (fig. 3.142).

Fig. 3.142



Aplicant l'estàtica, tenim

$$Q = q(x - l/4)$$

$$\sum M_s = 0 \Rightarrow M_z = q(l/4 \cdot x - x^2/2)$$

essent el domini per a les x : $0 < x < l/2$. El vèrtex és a $x = l/4$.

Donant valors a x ,

$$C : Q(0) = -ql/4 \downarrow \uparrow \quad D : Q(l/2) = ql/4 \uparrow \downarrow$$

$$C : M_z(0) = 0 \quad M_z(l/4) = ql^2/32 \curvearrowright \curvearrowleft \quad D : M_z(l/2) = 0$$

Ja podem representar gràficament els esforços obtinguts (fig. 3.143).

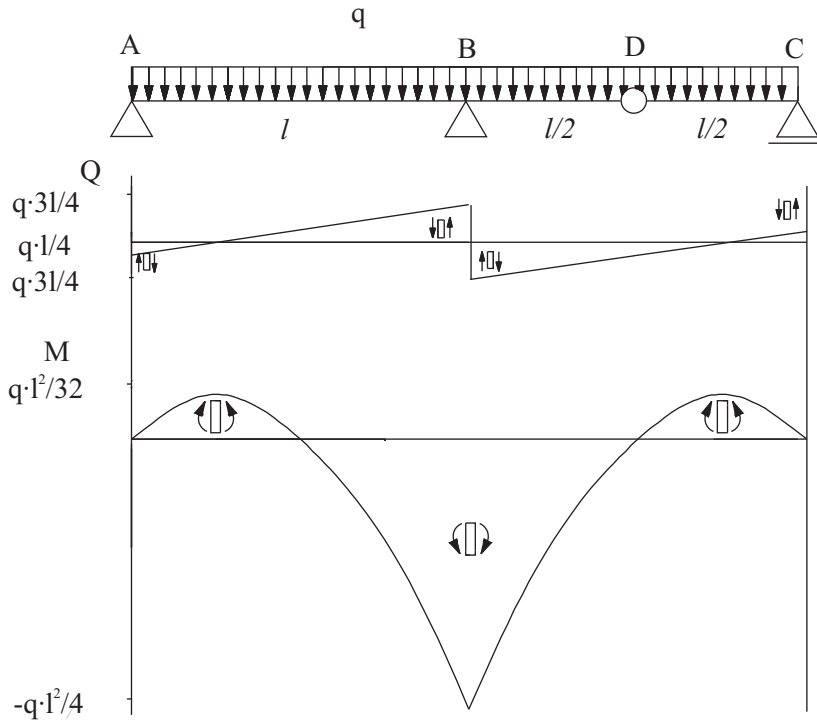


Fig. 3.143

Problema 3.23

Trobeu els esforços interns de l'estructura següent i representeu-los gràficament (fig. 3.144).

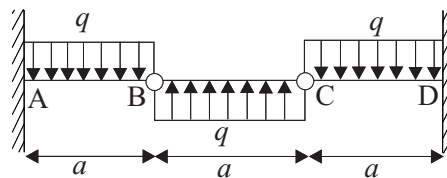


Fig. 3.144

Solució:

Les reaccions, les tenim a la figura 3.145. Aïllem la barra AB i apliquem l'estàtica. Observem que al punt B, com que és una ròtula, no hi ha moment flector (fig. 3.146). Havent

aplicat les consideracions de simetria, tenim en total tres incògnites: R_0, M_0 i el cisallament a les ròtules B i C, que anomenem Q_0

Fig. 3.145

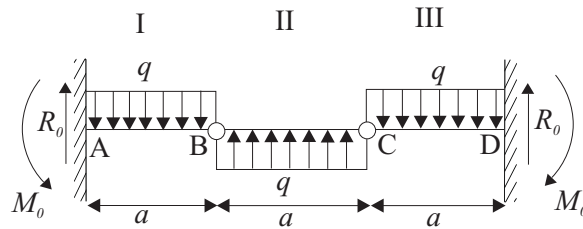
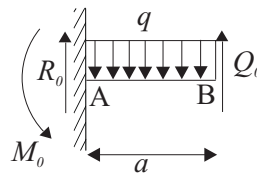


Fig. 3.146



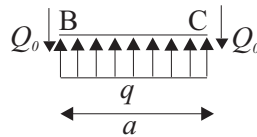
Aplicant les equacions d'equilibri, obtenim

$$R_0 + Q_0 = qa \quad (3.3)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_0 + Q_0 a = qa^2/2 \quad (3.4)$$

Aplicant les equacions d'equilibri a la barra BC (fig. 3.147),

Fig. 3.147



$$2Q_0 = qa$$

d'on

$$Q_0 = \frac{qa}{2}$$

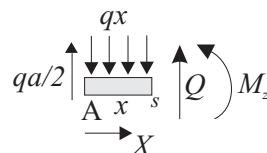
substituint a 3.3 i 3.4, obtenim

$$Q_A = \frac{qa}{2}$$

$$M_A = 0$$

Ara ja podem realitzar l'anàlisi de les regions. Per a la regió I (fig. 3.148)

Fig. 3.148





$$qa/2 + Q = qx \Rightarrow Q = qx - qa/2$$

donant valors a x ,

$$Q(0) = -qa/2 \quad \uparrow \downarrow \quad Q(a) = qa/2 \quad \downarrow \uparrow$$

Prenent moments respecte del punt on fem el tall

$$\frac{qa}{2}x = \frac{qx^2}{2} + M_z \Rightarrow M_z = \frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

donant valors a x

$$M_z(0) = 0 \quad M_z(a) = 0$$

El vèrtex de la paràbola, l'obtenim fent $M'_z = 0$

$$M'_z = qa/2 - qx = 0 \Rightarrow x = a/2 \quad M_z(a/2) = \frac{qa^2}{8} \quad \curvearrowright$$

Per a la regió II (fig. 3.149),

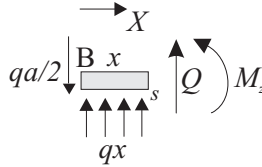


Fig. 3.149

$$qa/2 = Q + qx \Rightarrow Q = -qx + qa/2$$

donant valors a x ,

$$Q(0) = qa/2 \quad \downarrow \uparrow \quad Q(a) = -qa/2 \quad \uparrow \downarrow$$

Prenent moments respecte del punt on fem el tall

$$\frac{qa}{2}x + M_z = \frac{qx^2}{2} \Rightarrow M_z = -\frac{qa}{2}x + \frac{qx^2}{2}$$

donant valors a x

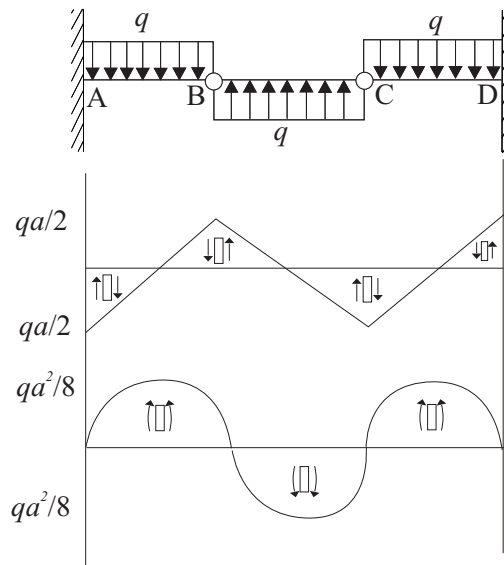
$$M_z(0) = 0 \quad M_z(a) = 0$$

El vèrtex de la paràbola, l'obtenim fent $M'_z = 0$

$$M'_z = -qa/2 + qx = 0 \Rightarrow x = a/2 \quad M_z(a/2) = -\frac{qa^2}{8} \quad \curvearrowleft$$

L'anàlisi de la regió III no cal que el fem ja que podem completar les gràfiques per simetria. Les gràfiques, les tenim a la figura 3.150

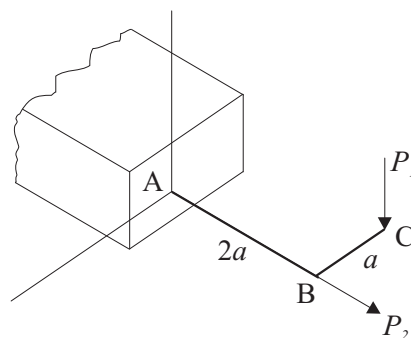
Fig. 3.150



Problema 3.24

Una barra rígida AC, doblegada al punt B en angle recte (fig. 3.151), és encastada al seu extrem A. Calculeu els esforços normals i de cisallament, així com els moments torsors i flectors al punt A i al voltant del punt B.

Fig. 3.151

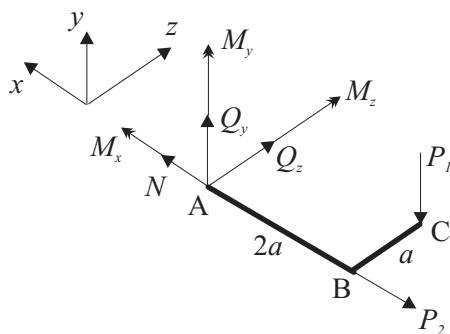


Solució:

Fem un tall pel punt A i apliquem l'estàtica (fig. 3.152),



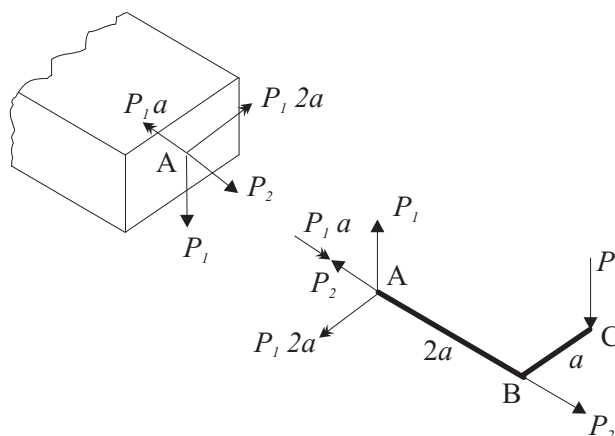
Fig. 3.152



$$\begin{aligned} N &= P_2 \\ Q_y &= P_1 \\ Q_z &= 0 \\ M_x &= -P_1 a \\ M_y &= 0 \\ M_z &= -P_1 2a \end{aligned}$$

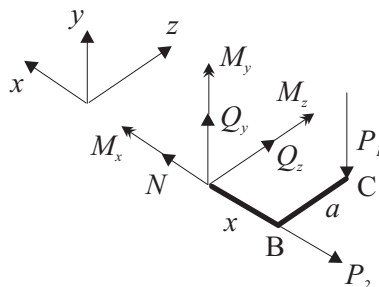
esforços que hem dibuixat a la figura 3.153

Fig. 3.153



Per esbrinar els esforços a ambdós costats de la secció B, fem primerament un tall en una secció situada entre A i B (fig. 3.154). Les equacions d'equilibri són

Fig. 3.154





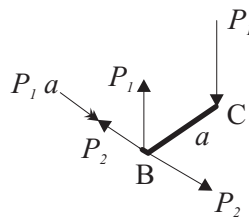
$$\begin{aligned} N &= P_2 \\ Q_y &= P_1 \\ Q_z &= 0 \\ M_x &= -P_1 a \\ M_y &= 0 \\ M_z &= -P_1 x \end{aligned}$$

Els esforços a la secció prop de B, a la banda d'A, són els anteriors prenent $x = 0$, és a dir,

$$\begin{aligned} N &= P_2 \\ Q_y &= P_1 \\ Q_z &= 0 \\ M_x &= -P_1 a \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0 \end{aligned}$$

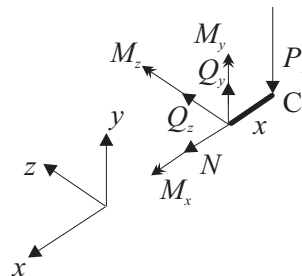
que els tenim dibuixats a la figura 3.155

Fig. 3.155



Per calcular els esforços a la secció B, a la banda de C, fem un tall en una secció situada entre B i C (figura 3.156). Les equacions d'equilibri són

Fig. 3.156



$$\begin{aligned} N &= 0 \\ Q_y &= P_1 \end{aligned}$$

→ 4



Moments d'inèrcia

Els moments d'inèrcia són quantitats dimensionals que s'utilitzen en dinàmica de sòlids rígids en estudiar rotacions, en mecànica de sòlids deformables en estudiar les flexions, torsions, etc., i també en altres camps de la física, com la mecànica de fluids. Ens limitarem al cas dels cossos bidimensionals, ja que són els que ens interessen per la resistència de materials.

Sigui un cos bidimensional amb una superfície A i una densitat superficial σ (fig. 4.1); el seu **moment d'inèrcia respecte de l'eix X** , I_x , es defineix com

$$I_x = \int_A \sigma y^2 dA$$

i el seu **moment d'inèrcia respecte de l'eix Y** , I_y , com

$$I_y = \int_A \sigma x^2 dA$$

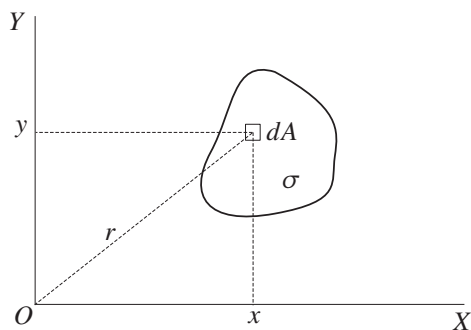


Fig. 4.1
Significat geomètric dels moments d'inèrcia.

Els moments d'inèrcia definits així reflecteixen la distribució de masses al voltant de l'eix, sense importar que aquestes masses estiguin a un costat o a l'altre d'aquest eix. En el SI, la unitat del moment d'inèrcia és $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

En cas que la densitat superficial σ sigui constant, les expressions anteriors adopten la forma

$$I_x = \sigma \int_A y^2 dA$$

i

$$I_y = \sigma \int_A x^2 dA$$

Les integrals anteriors són els **moments d'inèrcia geomètrics**. Sovint parlarem de moment d'inèrcia referint-nos únicament a aquests, si no hi ha lloc a la confusió. En el SI, la unitat del moment d'inèrcia geomètric és m^4 .

Es defineix el **moment polar d'inèrcia del cos respecte del punt O** per

$$J_o = \int_A \sigma r^2 dA$$

i tindrem

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow J_o = I_x + I_y$$

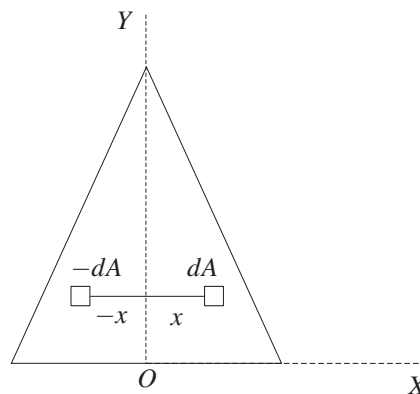
Així mateix, es defineix el **producte d'inèrcia del cos respecte dels eixos X i Y** per

$$P_{xy} = \int_A \sigma xy dA$$

Observem que tant els moments d'inèrcia com el moment polar d'inèrcia són sempre positius; en canvi, el producte d'inèrcia pot ser positiu, zero o negatiu. De la mateixa manera que hem fet amb els moments d'inèrcia, es defineix el **producte d'inèrcia geomètric** respecte dels eixos X, Y per $P_{xy} = \int_A xy dA$.

Si X o Y són eixos de simetria, llavors $P_{xy} = 0$. En efecte, si observem la figura 4.2, en la qual l'eix Y és de simetria, veiem que la contribució dels elements dA i $-dA$ a la integral P_{xy} és zero; per tant, P_{xy} s'anul·la.

Fig. 4.2
Simetria.





Es defineix el radi de gir del cos respecte de l'eix X com la distància k_x respecte de l'eix X en la qual podríem concentrar tot el cos i obtenir el mateix moment d'inèrcia I_x (fig. 4.3).

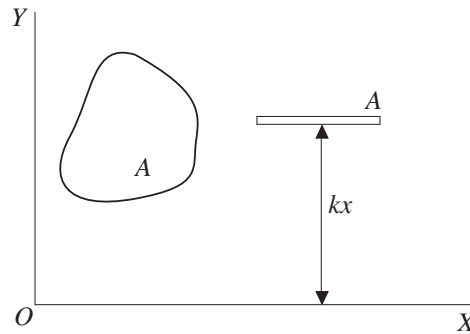


Fig. 4.3
Radi de gir.

És a dir, s'ha de complir

$$I_x = k_x^2 A$$

d'on

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Igualment, es defineix el radi de gir respecte de l'eix Y , k_y , per

$$I_y = k_y^2 A$$

i el radi de gir respecte del punt O per

$$J_o = k_o^2 A$$

De $J_o = I_x + I_y$, es té

$$k_o^2 = k_x^2 + k_y^2$$

4.1. Teorema de Steiner

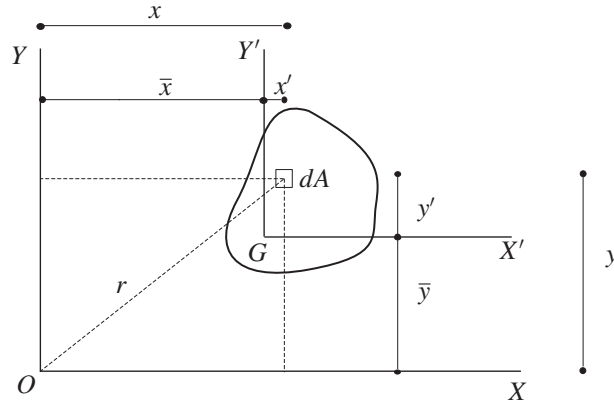
També anomenat **teorema dels eixos paral·lels**, ja que relaciona els moments d'inèrcia d'un cos respecte a dos eixos paral·lels, un d'ells quals passa pel centre de masses G (fig. 4.4).

Es té

$$I_x = \int y^2 dA = \int (\bar{y} + y')^2 dA = \int \bar{y}^2 dA + 2\bar{y} \int y' dA + \int y'^2 dA$$



Fig. 4.4
Teorema de Steiner.



El tercer terme de la dreta és zero en passar l'eix X' pel centre de masses G . Per tant, s'obté

$$I_x = I_{x'} + \bar{y}^2 A \quad (4.1)$$

cosa que constitueix l'expressió del **teorema de Steiner** per al moment d'inèrcia. S'observa que el moment d'inèrcia respecte d'un eix que passi pel centre de masses (**eix central**) és sempre menor que el moment d'inèrcia respecte a qualsevol altre eix paral·lel al primer.

Es pot establir una expressió similar a la 4.1, pel producte d'inèrcia.

$$P_{xy} = \int xy dA = \int (\bar{x} + x')(\bar{y} + y') dA = \int \bar{x}\bar{y} dA + \int \bar{x}y' dA + \int \bar{y}x' dA + \int x'y' dA$$

La segona i la tercera integrals del segon terme són zero perquè els eixos X' i Y' passen pel centre de masses G . Per tant, tenim

$$P_{xy} = P_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \quad (4.2)$$

que és l'expressió del teorema d'Steiner per al producte d'inèrcia.

4.2. Moment d'inèrcia en una direcció arbitrària

De vegades, és fàcil trobar els moments d'inèrcia i el producte d'inèrcia respecte a uns eixos determinats, però ens interessen els moments d'inèrcia respecte a eixos en altres direccions, ja que són els que apareixen en les equacions de la mecànica. Sigui OY_1Y_2 un sistema de referència; volem trobar el moment d'inèrcia del cos respecte d'un eix arbitrari U (fig. 4.5). (Escrivim Y_1, Y_2 en lloc de X, Y perquè és més àgil la notació indexal que utilitzem).

Designem per \mathbf{u} el vector unitari en la direcció OU . Així, escrivim

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{r} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2$$

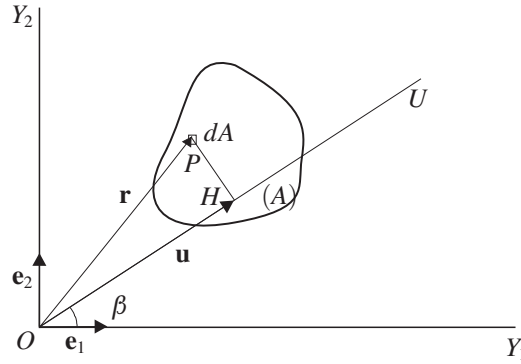


Fig. 4.5
Moment d'inèrcia en una direcció arbitrària.

Es té

$$I_u = \int_A (\mathbf{HP})^2 dA = \int_A (\mathbf{r}^2 - \mathbf{OH}^2) dA = \int_A [\mathbf{r}^2 - (\mathbf{ru})^2] dA \quad (4.3)$$

Introduint la notació $\mathbf{r}^2 = y_i y_i$; $\mathbf{ru} = y_i u_i$, tenim

$$(\mathbf{ru})^2 = (y_i u_i)^2 = y_i u_i y_j u_j = y_i y_j u_i u_j$$

portant aquests resultats a 4.3, tenim

$$I_u = \int_A (y_i y_j - y_i y_j u_i u_j) dA = \int_A (y_k y_k \delta_{ij} - y_i y_j u_i u_j) dA$$

perquè el vector \mathbf{u} és unitari.

Traient factor comú $u_i u_j$

$$I_u = \int_A (y_k y_k \delta_{ij} - y_i y_j) u_i u_j dA = u_i u_j \int_A (y_k y_k \delta_{ij} - y_i y_j) dA$$

Definint I_{ij} per

$$I_{ij} = \int_A (y_k y_k \delta_{ij} - y_i y_j) dA \quad (4.4)$$

$$I_u = I_{ij} u_i u_j \quad (4.5)$$

Per a les dues dimensions, obtenim

$$I_u = I_{11} u_1^2 + I_{22} u_2^2 + 2I_{12} u_1 u_2 \quad (4.6)$$

i escrita l'expressió en termes de x i y

$$I_u = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + 2I_{xy} u_x u_y$$



El conjunt de quantitats I_{ij} és simètric respecte dels índexs i, j vegem-ho

$$I_{ji} = \int_A (y_k y_k \delta_{ji} - y_j y_i) dA = I_{ij}$$

perquè $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Desenvolupant cadascuna de les quantitats I_{ij} , s'obté

$$I_{11} = \int_A (y_1^2 + y_2^2 - y_1^2) dA = \int_A y_2^2 dA$$

que és el moment d'inèrcia respecte de l'eix Y_1 .

$$I_{22} = \int_A (y_1^2 + y_2^2 - y_2^2) dA = \int_A y_1^2 dA$$

que és el moment d'inèrcia respecte de l'eix Y_2 .

$$I_{12} = I_{21} = \int_A -y_1 y_2 dA$$

que és el producte d'inèrcia respecte dels eixos Y_1, Y_2 , canviat de signe, $-P_{12}$.

Tornem a escriure l'equació 4.6

$$I_u = I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 - 2P_{12}u_1u_2$$

expressió que es pot posar en forma matricial com

$$I_u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & -P_{12} \\ -P_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

o bé, tenint en compte que $u_1 = \cos\beta$ i $u_2 = \sin\beta$,

$$I_u = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & -P_{12} \\ -P_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

i, escrita l'expressió en termes de x i y ,

$$I_u = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Matemàticament, les quantitats I_{ij} són els elements d'una matriu 2×2 associada a una forma bilineal simètrica, dit d'una altra manera, els elements d'un tensor de segon ordre que s'anomena **tensor d'inèrcia del punt O**. Assenyallem que en cada punt del cos, o fora del cos, hi ha un tensor d'inèrcia. Les components d'aquest tensor varien si varia l'orientació dels eixos de coordenades, de la mateixa manera que les components d'un vector varien en girar els eixos, encara que el vector resta inalterat.

L'expressió 4.7 permet, coneguts els moments d'inèrcia i el producte d'inèrcia respecte dels eixos Y_1, Y_2 , trobar el moment d'inèrcia respecte d'un eix que passi per l'origen de coordenades i estigui orientat en una direcció qualsevol.



4.3. Canvi d'eixos

Vegem ara com canvien les components del tensor d'inèrcia en realitzar una rotació d'eixos. Siguin \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 els nous eixos amb origen a O, obtinguts girant un angle α els eixos Y_1, Y_2 (fig. 4.6). El moment d'inèrcia I_u és el mateix tant si el calculem utilitzant 4.7, referida als eixos Y_1, Y_2 , com si ens referim als nous eixos \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 , és a dir

$$I_u = I_{ij}u_iu_j = \bar{I}_{ij}\bar{u}_i\bar{u}_j \quad (4.9)$$

essent \bar{I}_{ij} les components del tensor respecte als nous eixos i u_i les components del vector \mathbf{u} respecte d'aquests eixos.

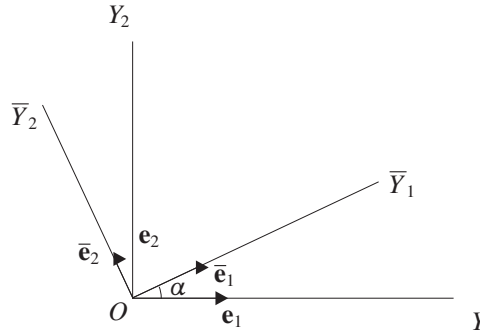


Fig. 4.6
Canvi d'eixos.

És a dir, es té

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 = \bar{u}_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{u}_2\bar{\mathbf{e}}_2$$

El que ens interessa és expressar \bar{I}_{ij} en funció de I_{ij} . Per realitzar-ho, comencem posant u_i, u_j en funció de \bar{u}_i, \bar{u}_j . Podem escriure

$$\bar{u}_i = a_{ij}u_j \quad (4.10)$$

on a_{ij} és la matriu de rotació. En dues dimensions, s'escriu

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

Com que volem u_i en funció de \bar{u}_i , posarem

$$u_i = a_{ji}\bar{u}_j \quad (4.11)$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

Substituint 4.10 i 4.11 a 4.9, i canviant els índexs muts, es té

$$I_{ij}a_{ki}\bar{u}_ka_{lj}\bar{u}_j = \bar{I}_k\bar{u}_k\bar{u}_l$$



d'on

$$\bar{I}_{kl} = I_{ij} a_{ki} a_{lj} \quad (4.12)$$

Aquesta expressió, per al cas bidimensional i en forma matricial, s'escriu

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{11} & \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{21} & \bar{I}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

i en termes de x i y

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_x & -\bar{P}_{xy} \\ -\bar{P}_{xy} & \bar{I}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Observem que en aplicar 4.14 s'obté: \bar{I}_x , que és el moment d'inèrcia respecte de l'eix \bar{X} . \bar{I}_y , que és el moment d'inèrcia respecte de l'eix \bar{Y} . \bar{P}_{xy} , que és el producte d'inèrcia respecte dels eixos X, Y .

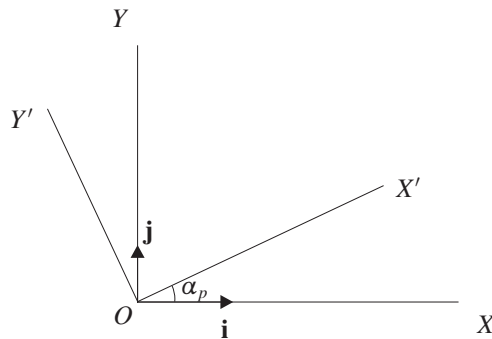
Desenvolupant l'equació 4.14 en components queda

$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2P_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \bar{I}_y &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + 2P_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \bar{P}_{xy} &= (I_x - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + P_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.4. Eixos principals

Atès que el tensor d'inèrcia és simètric, sempre es pot diagonalitzar. És a dir, en qualsevol punt hi ha un parell d'eixos, X', Y' , respecte als quals el tensor d'inèrcia és diagonal i, per tant, el producte d'inèrcia és zero (fig. 4.7).

Fig. 4.7
Eixos principals.



D'aquesta manera, es té

$$\begin{pmatrix} I_{x'} & 0 \\ 0 & I_{y'} \end{pmatrix}$$



Els eixos X', Y' , respecte dels quals el tensor d'inèrcia és diagonal, s'anomenen **eixos principals**. Per trobar els eixos principals, igualem a zero \bar{P}_{xy} a l'equació 4.15

$$0 = (I_x - I_y) \sin \alpha_p \cos \alpha_p + P_{xy} (\cos^2 \alpha_p - \sin^2 \alpha_p)$$

on α_p és l'angle que hem de girar els eixos X, Y per obtenir els eixos principals. Simplificant,

$$0 = 1/2(I_x - I_y) \sin 2\alpha_p + P_{xy} \cos 2\alpha_p$$

dividint per $\cos 2\alpha_p$

$$0 = 1/2(I_x - I_y) \tan 2\alpha_p + P_{xy}$$

$$\tan 2\alpha_p = \frac{-2P_{xy}}{I_x - I_y} \quad (4.16)$$

equació que ens dona l'angle α_p que formen els eixos principals amb els eixos X, Y . Observem que l'equació ens dona dos angles que difereixen 90° . Un cop tenim els dos angles α_p , per aplicació de l'expressió

$$I = \begin{pmatrix} \cos \alpha_p & \sin \alpha_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_p \\ \sin \alpha_p \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

n'obtenim els moments principals. També els podríem obtenir aplicant l'expressió 4.14 i substituint α_p

$$\begin{pmatrix} I_{x'} & 0 \\ 0 & I_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_p & \sin \alpha_p \\ -\sin \alpha_p & \cos \alpha_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_p & -\sin \alpha_p \\ \sin \alpha_p & \cos \alpha_p \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Els elements situats a la diagonal del tensor de l'esquerra són els dos moments principals i, si els càlculs són correctes, els elements fora de la diagonal han de donar, aproximadament, zero.

De tots els eixos que passen pel punt O, és en les dimensions dels eixos principals on es produeixen els moments d'inèrcia màxim i mínim, vegem-ho. El moment d'inèrcia respecte d'un eix que forma un angle α amb la horitzontal és, segons 4.8,

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2P_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

Per buscar l'angle α que dona un moment d'inèrcia màxim o mínim, hem de derivar i igualar a zero

$$\begin{aligned} I'_u &= -2I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cos \alpha + 2P_{xy} \sin^2 \alpha - 2P_{xy} \cos^2 \alpha \\ &= -2(I_x - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + 2P_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\ &= -2\bar{P}_{xy} \end{aligned}$$

d'on, igualant a zero,

$$\bar{P}_{xy} = 0$$



i, per tant,

$$\tan 2\alpha = \frac{-2P_{xy}}{I_x - I_y}$$

que és l'equació 4.16. Destaquem dos fets importants:

- Si un cos bidimensional té un eix de simetria, aquest i el seu perpendicular són eixos principals, ja que el producte d'inèrcia respecte d'ells és zero.
- Un eix principal no té per què ser de simetria. Recordem que existeixen sempre eixos principals a cada punt, hi hagi simetria o no.

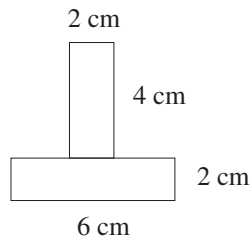
4.5. Problemes

Aquí es resolen alguns exemples de càlcul de moments d'inèrcia i en capítols posteriors se'n calculen d'altres en la resolució dels problemes.

Problema 4.1

Calculeu el moment d'inèrcia de la secció en T de la figura 4.8 respecte d'un eix central paral·lel a la base.

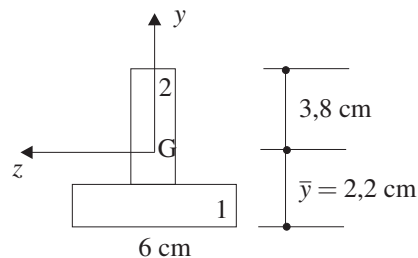
Fig. 4.8



Solució:

El primer que hem de fer és localitzar el centroide de la secció. Dividim aquesta en dues parts i hi apliquem l'expressió discreta del centroide (fig. 4.9),

Fig. 4.9



$$\bar{y} = \frac{1 \cdot 12 + 4 \cdot 8}{20} = 2,2\text{cm}$$



Així,

$$I_z = I_z^1 + I_z^2 = \int_{-2,2}^{-0,2} y^2 6 dy + \int_{-0,2}^{3,8} y^2 2 dy = 2(-0,2^3 + 2,2^3) + 0,66(3,8^3 + 0,2^3) = 57,5 \text{ cm}^4$$

Problema 4.2

Determineu l'orientació dels eixos principals d'inèrcia i els moments d'inèrcia principals en el centroide del perfil de la figura 4.10.

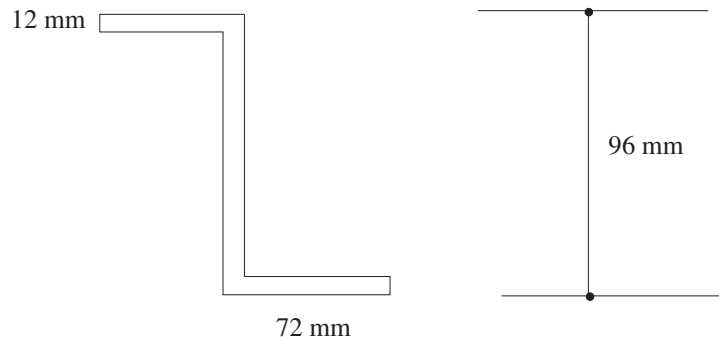


Fig. 4.10

Solució:

Dividim la secció en tres parts (fig. 4.11) per calcular directament els moments d'inèrcia total com a suma dels de cadascuna d'elles

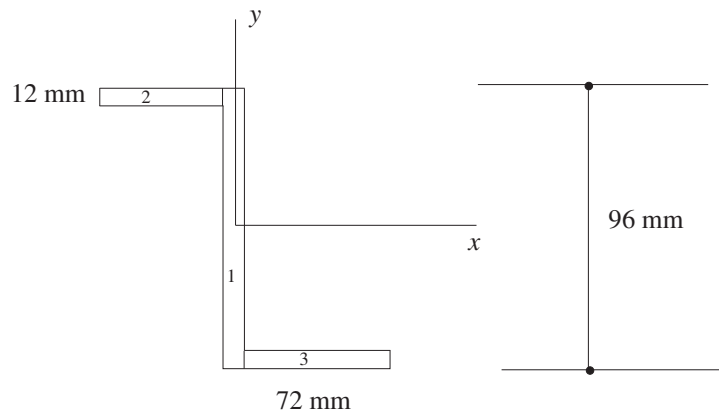


Fig. 4.11

Primerament, calculem els moments d'inèrcia i el producte d'inèrcia respecte dels eixos horitzontal i vertical, x , y ,

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 + I_x^3 = \int_{-48}^{48} y^2 12 dy + \int_{36}^{48} y^2 60 dy + \int_{-48}^{-36} y^2 60 dy = 3,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



$$I_y = I_y^1 + I_y^2 + I_y^3 = \int_{-6}^6 x^2 96 dx + \int_{-66}^{-6} x^2 12 dx + \int_6^{66} x^2 12 dx = 2,32 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$P_{xy} = P_{xy}^1 + P_{xy}^2 + P_{xy}^3 = 0 + 2 \int_{-66}^{-6} x dx \int_{36}^{48} y dy = -2,18 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Així, el tensor d'inèrcia en el centroide referit als eixos x, y és

$$\begin{pmatrix} 3,44 \cdot 10^6 & 2,18 \cdot 10^6 \\ 2,18 \cdot 10^6 & 2,32 \cdot 10^6 \end{pmatrix}$$

L'orientació α_p dels eixos principals, l'obtenim de l'expressió

$$\tan 2\alpha_p = -\frac{2P_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{4,36}{1,12}$$

$$\alpha_p = 37,8^\circ$$

per tant, els moments d'inèrcia principals seran (fig. 4.12)

$$I_{x_p} = (\cos 37,8^\circ, \sin 37,8^\circ) \begin{pmatrix} 3,44 \cdot 10^6 & 2,18 \cdot 10^6 \\ 2,18 \cdot 10^6 & 2,32 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 37,8^\circ \\ \sin 37,8^\circ \end{pmatrix} =$$

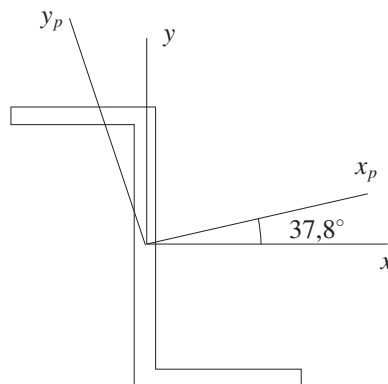
$$= 5,12 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

i

$$I_{y_p} = (\cos 127,8^\circ, \sin 127,8^\circ) \begin{pmatrix} 3,44 \cdot 10^6 & 2,18 \cdot 10^6 \\ 2,18 \cdot 10^6 & 2,32 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 127,8^\circ \\ \sin 127,8^\circ \end{pmatrix} =$$

$$= 0,62 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Fig. 4.12



Problema 4.3

Determineu l'orientació dels eixos principals d'inèrcia i els moments d'inèrcia principals en el centroide del perfil de la figura 4.13,

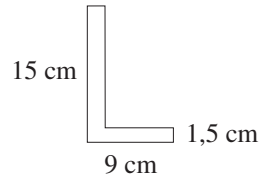


Fig. 4.13

Solució:

El primer que hem de fer és localitzar el centroide de la secció. Dividim aquesta en dues parts i hi apliquem l'expressió discreta del centroide (fig. 4.14),

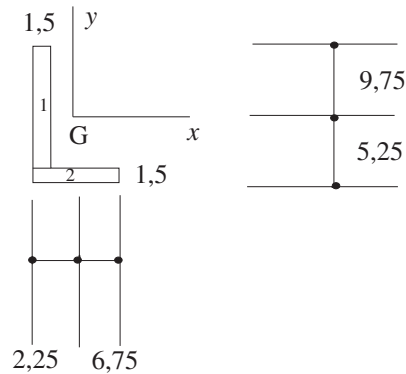


Fig. 4.14

$$\bar{x} = \frac{0,75 \cdot 20,25 + 4,5 \cdot 13,5}{33,75} = 2,25 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{8,25 \cdot 20,25 + 0,75 \cdot 13,5}{33,75} = 5,25 \text{ cm}$$

Calculem els moments d'inèrcia i el producte d'inèrcia respecte dels eixos horitzontal i vertical, x , y

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 = \int_{-3,75}^{9,75} y^2 1,5 dy + \int_{-5,25}^{-3,75} y^2 9 dy = 765,7 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_y^1 + I_y^2 = \int_{-2,25}^{-0,75} x^2 13,5 dx + \int_{-2,25}^{6,75} x^2 1,5 dx = 208,82 \text{ cm}^4$$

$$P_{xy} = P_{xy}^1 + P_{xy}^2 = \int_{-2,25}^{-0,75} x dx \int_{-3,75}^{9,75} y dy + \int_{-2,25}^{6,75} x dx \int_{-5,25}^{-3,75} y dy = -227,81 \text{ cm}^4$$

Així, el tensor d'inèrcia en el centroide referit als eixos x , y és

$$\begin{pmatrix} 765,7 & 227,81 \\ 227,81 & 208,82 \end{pmatrix}$$



L'orientació α_p dels eixos principals l'obtenim de l'expressió

$$\tan 2\alpha_p = \frac{-2P_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot 227,81}{765,7 - 208,82}$$
$$\alpha_p = 19,6^\circ$$

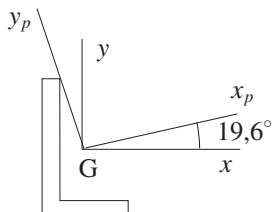
per tant, els moments d'inèrcia principals serán (fig. 4.15)

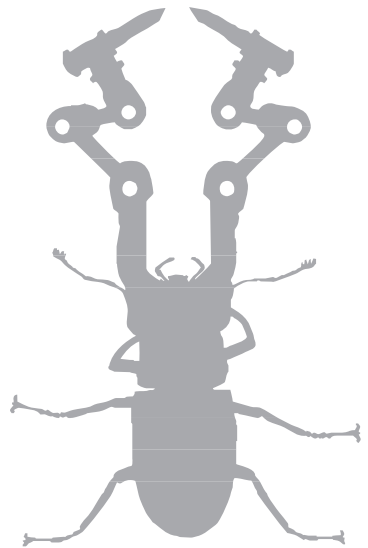
$$I_{x_p} = (\cos 19,6^\circ, \sin 19,6^\circ) \begin{pmatrix} 765,7 & 227,81 \\ 227,81 & 208,82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 19,6^\circ \\ \sin 19,6^\circ \end{pmatrix} = 847 \text{ cm}^4$$

i

$$I_{y_p} = (\cos 109,6^\circ, \sin 109,6^\circ) \begin{pmatrix} 765,7 & 227,81 \\ 227,81 & 208,82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 109,6^\circ \\ \sin 109,6^\circ \end{pmatrix} = 127,51 \text{ cm}^4$$

Fig. 4.15





→ 5



Tracció i compressió pura

S'anomena *tracció o compressió pura* l'estat de sol·licitació en el qual l'únic esforç que hi ha a la secció transversal de la barra és un esforç normal, que designem per N , aplicat al seu centroide.

Considerem una barra rectilínia en l'estat no deformat (fig. 5.1). Com hem fet al capítol 3, prenem els eixos locals de la manera següent: l'origen de coordenades al centroide de la secció transversal (a la figura, estan dibuixats a la secció central), l'eix X en la direcció de l'eix de la barra i Y, Z sobre la secció transversal. A més, fem que Y, Z coincideixin amb els eixos principals d'inèrcia de la secció. Observem que hem designat els eixos locals sense sobreratllar, perquè ens és més còmode en la deducció de les equacions.

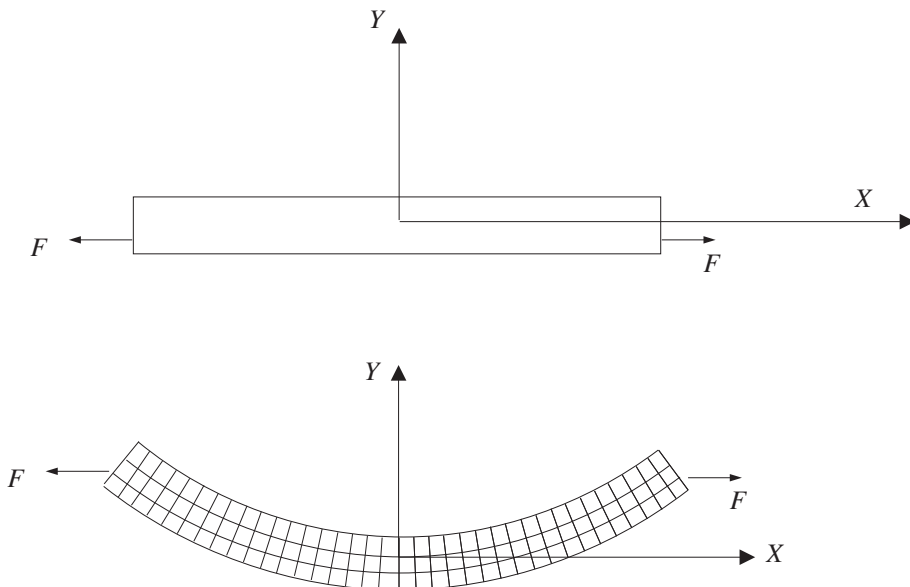


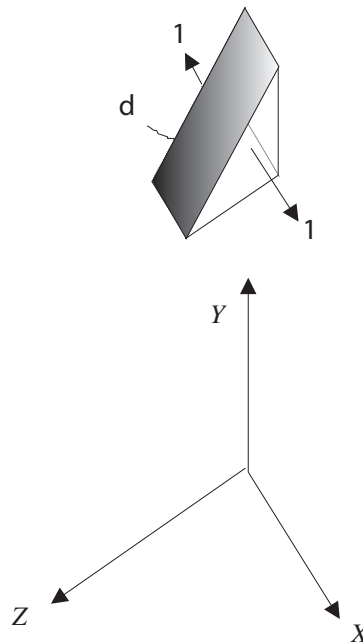
Fig. 5.1
Tracció o compressió.

Suposem ara que als dos extrems s'aplica una força en la direcció X . En aquest cas, les seccions transversals es mantenen planes i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat. Això es pot comprovar observant la figura 5.1, on s'ha suposat una situació més general (en la qual és inclosa la tracció o compressió pura): que l'esforç normal actua en un punt qualsevol de la secció.

Com que a totes les seccions transversals hi ha el mateix esforç, únicament una força axial, o normal, totes elles es deformen de la mateixa manera. Però, per simetria, la secció del mig es manté plana; per tant, totes les seccions es mantindran també planes. Per simetria, es pot comprovar també que les seccions es mantenen perpendiculars a la línia de centroides; això implica que les deformacions de cisallament i, per tant, les tensions de cisallament, són zero en aquesta situació. Es a dir, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$.

Com que totes les seccions es deformen igual, en totes elles hi ha la mateixa distribució de tensions. Podem fixar-nos, doncs, en qualsevol d'elles: prendrem la secció central. Si prenem un petit element de gruix ds al voltant d'un punt d'aquesta secció, en produir-se la tracció o compressió en varia el gruix: s'allarga o s'escurça. És a dir, apareixen tensions normals en direcció tangent a la línia de centroides de l'estat deformat, que no coincideix amb l'eix X per poc que ens apartem de la secció central. D'altra banda, no apareixen tensions de cisallament, com ja hem dit.

Fig. 5.2
Element diferencial
proper al contorn lateral.



Si suposem desplaçaments i deformacions molt petites, podem considerar que la línia de centroides en l'estat deformat coincideix, aproximadament, amb l'eix X , és a dir, que el seu pendent és molt petit (això no implica que la curvatura, que està lligada amb la segona derivada i no amb la primera, com el pendent, hagi de ser també igual de petita). Per tant, podem considerar, amb desplaçaments i deformacions molt petits, que les tensions normals que apareixen van en la direcció de X ; designem-les per σ_{xx} .



Pel que fa a les tensions σ_{yy} i σ_{zz} , observem que en el contorn lateral de la barra, com que no hi ha càrregues aplicades, no hi ha tensió, ni normal ni de cisallament. Prenem un element petit al voltant d'un dA d'aquest contorn lateral (fig. 6.3); és clar que, si sobre dA no hi ha tensió de cap mena i tampoc no hi ha tensions de cisallament sobre cap cara, llavors σ_{yy} i σ_{zz} han de ser zero en els punts propers al contorn lateral. Podem continuar el raonament per contigüitat, i comprovar així que a tots els punts de la secció transversal $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$.

D'altra banda, l'aproximació esmentada ens permet aplicar l'equilibri en l'estat no deformat per calcular els esforços a les seccions transversals en comptes de fer-ho a l'estat deformat, que seria el més correcte però ens obligaria a considerar els desplaçaments de les seccions com a incògnites.

Tornem-nos a situar en el cas de tracció o compressió pura, que és, segons hem dit, la situació en què a la secció transversal solament hi ha un esforç normal N , i calculem σ_{xx} , que és l'única tensió present, segons hem vist. Considerem un element diferencial limitat per dues seccions transversals separades ds de la barra rectilínia en el seu estat no deformat (fig. 5.3). En produir-se la tracció o compressió, els punts de la secció es mouen i les longituds de les fibres varien, de manera que una fibra de longitud ds abans de la deformació passa a mesurar $ds + dl$ després de la deformació, és a dir, la seva longitud ha variat dl . El moviment més general que pot fer la secció és una translació més una rotació; això és el que suposarem (fig. 5.3a).

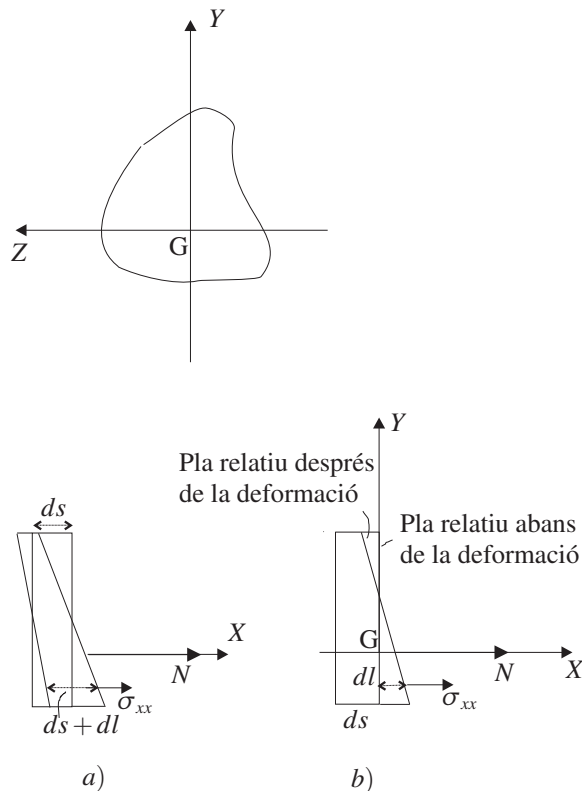


Fig. 5.3
Moviment hipotètic de les seccions transversals en la tracció o compressió pura: a) gir absolut, b) gir relatiu (en el text, es comprova que el gir relatiu és zero).



Amb les aproximacions esmentades, la deformació normal u_{xx} és

$$u_{xx} = \frac{dl}{ds} \quad (5.1)$$

Si suposem que hi ha linealitat entre σ_{xx} i u_{xx} , és a dir, que es compleix la llei de Hooke, i tenint en compte que $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, segons 5.14 es complirà

$$\sigma_{xx} = E u_{xx} \quad (5.2)$$

on E és el mòdul de Young, característic de cada material. Aquesta linealitat és aproximada i el seu marge de validesa depèn del tipus de material (per a l'acer, per exemple, és bastant aproximada; per al ferro de fosa, no).

Solament ens interessa el desplaçament relatiu de dues seccions molt properes, que, de produir-se, és degut als esforços interns; si aquestes dues seccions es desplacen exactament el mateix, és un moviment de sòlid rígid, sense esforços interns. Per aconseguir estudiar solament el desplaçament relatiu de la secció transversal de la dreta, suposem que la de l'esquerra no es mou (fig. 5.3, *b*). Així doncs, respecte dels eixos locals X, Y, Z definits, l'equació del pla relatiu de la secció transversal després de la deformació serà

$$dl = A_0 y + B_0 z + C_0 \quad (5.3)$$

on hem escrit dl en comptes de x per indicar que, en direcció X , el que tenim és el desplaçament relatiu, no l'absolut.

Calculem els coeficients d'aquest pla relatiu donat per 5.3. Tenint en compte 5.2 i 5.1, podem escriure

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{ds} (A_0 y + B_0 z + C_0) \quad (5.4)$$

El conjunt de tensions σ_{xx} ha de ser equivalent a la força N aplicada a G ; això implica dues coses: que la resultant de les tensions ha de ser igual a N i que el moment resultant de les tensions respecte al punt G ha de ser zero. De l'equivalència de forces horitzontals,

$$\int_A \sigma_{xx} dA = N$$

substituint 5.4,

$$\begin{aligned} \int_A \frac{E}{ds} (A_0 y + B_0 z + C_0) dA &= N \\ \frac{E}{ds} \left(A_0 \int_A y dA + B_0 \int_A z dA + C_0 \int_A dA \right) &= N \end{aligned}$$

Per hipòtesi, els eixos Y i Z són eixos centrals; això significa que

$$\begin{aligned} \int_A y dA &= 0 \\ \int_A z dA &= 0 \end{aligned}$$



Així doncs,

$$C_0 = \frac{Nds}{AE}$$

Del principi d'equivalència de moments respecte de G ,

$$\int_A \mathbf{r} \times (\sigma_{xx} dA) \mathbf{i} = 0$$

que, en components, s'escriurà com

$$\int_A \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dl & y & z \\ \sigma_{xx} & 0 & 0 \end{vmatrix} dA = \int_A \sigma_{xx} \begin{vmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ y & z \end{vmatrix} dA = 0$$

Les dues components del vector resultant han de ser zero; igualant a zero la component \mathbf{k} i substituint 5.4,

$$\begin{aligned} \frac{E}{ds} \int_A (A_0 y + B_0 z + C_0) y dA &= 0 \\ A_0 \int_A y^2 dA + B_0 \int_A y z dA + C_0 \int_A y dA &= 0 \end{aligned}$$

La primera integral és el moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix Z ; la segona integral és zero pel fet que els eixos s'han pres com a principals d'inèrcia, i la tercera integral és zero pel fet que els eixos passen pel centroid; així doncs,

$$A_0 = 0$$

Igualant a zero la component \mathbf{j} ,

$$\begin{aligned} \frac{E}{ds} \int_A (A_0 y + B_0 z + C_0) z dA &= 0 \\ A_0 \int_A z y dA + B_0 \int_A z^2 dA + C_0 \int_A z dA &= 0 \end{aligned}$$

La primera integral és zero pel fet que els eixos s'han pres com a principals; la segona integral és el moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix Y , i la tercera integral és zero pel fet que els eixos passen pel centroid; així doncs,

$$B_0 = 0$$

Amb els resultats obtinguts, l'equació del pla relatiu serà

$$dl = \frac{Nds}{EA}$$

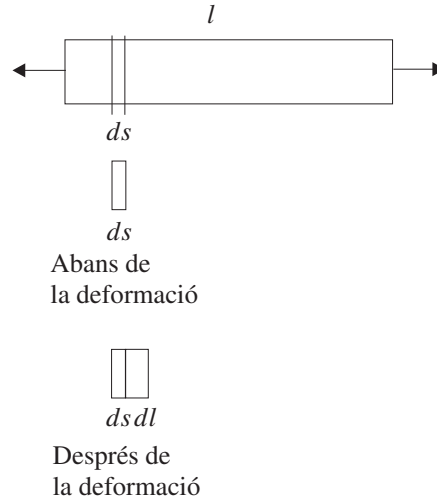
que correspon a un pla paral·lel al pla YZ , és a dir, que *el que ha experimentat el pla és una translació*. Això vol dir que tots els punts de la secció han experimentat la mateixa deformació normal i, per la llei de Hooke, la mateixa tensió

$$u_{xx} = \frac{N}{EA}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad (5.5)$$

El producte EA s'anomena *rigidesa a la tracció o compressió* de la barra. Podem calcular, com a exemple, l'allargament d'una barra, inicialment recta, de longitud l i de secció transversal A , sotmesa a tracció-compressió pura (fig. 5.4)

Fig. 5.4
Variació de la longitud
d'una barra sotmesa a
tracció o compressió
pures.



Tenim, per a la deformació normal,

$$u_{xx} = \frac{dl}{ds} = \frac{N}{EA}$$

Per tant,

$$\int dl = \int_0^l \frac{N}{EA} ds$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} ds$$

5.1. Efecte de la temperatura

Si sotmetem una barra a escalfaments o refredaments, la seva longitud varia, de manera que cada element de la barra, que considerem inicialment recta, de longitud ds , sotmès a una variació de temperatura ΔT passarà a tenir una longitud $ds + dl$, de tal manera que es complirà

$$dl = ds\alpha\Delta T$$



on α és el *coeficient de dilatació lineal*. Per tant, la deformació normal associada a una variació de temperatura, u_{xx}^T , serà

$$u_{xx}^T = \alpha \Delta T$$

Així, en una barra de longitud l sotmesa a esforços normals N i a variacions de temperatura, tenim, per a la variació de longitud,

$$\Delta l = \int \left(\frac{N}{EA} + \alpha \Delta T \right) ds$$

Si N i α són constants al llarg de la barra, i suposem que $E \neq E(T)$ i que $\alpha \neq \alpha(E)$, llavors

$$\Delta l = \frac{N}{EA} l + l \alpha \Delta T$$

5.2. Elements formats de materials diferents

Considerem un element compost per dos materials diferents units (les expressions resultants les podem generalitzar a un nombre més gran de materials) (fig. 5.5), sotmesos a una càrrega P . Sigui P_1 la força que actua sobre el material 1 i P_2 la que actua sobre el material 2. El càlcul de P_1 i P_2 és un problema estàticament indeterminat, ja que tan sols disposem d'una equació de l'estàtica.

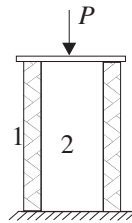


Fig. 5.5
Barra formada per dos materials.

Suposem que les seccions transversals es mantenen planes; això equival a dir que les deformacions normals són iguals per als dos materials. Això és aproximadament cert en el cas en que a les bases posem una placa molt rígida per aplicar-hi les càrregues.

$$u_{xx}^1 = u_{xx}^2$$

$$\frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2}$$

Aquesta equació indica que al material més dur li correspon més càrrega que al més tou, a igualtat d'àrea. Aquesta equació, unida a la de l'estàtica

$$P_1 + P_2 = P$$

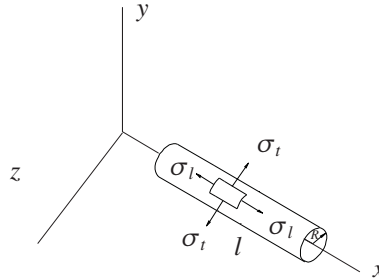
determina el problema de calcular P_1 i P_2 .

5.3. Cilindres i esferes de paret prima

Com a cas particular de tracció i compressió pura, calculem les tensions que apareixen en recipients cilíndrics o esfèrics de parets primes, sotmesos a pressió interna uniforme per part de gasos o líquids. Aquestes tensions s'anomenen *tensions de membrana*.

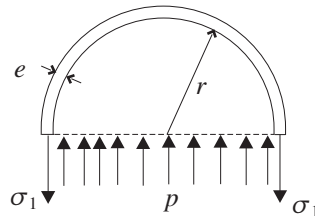
Per al cas del cilindre, en un element de la paret actuaran tensions en direcció longitudinal σ_l i tensions transversals σ_t (fig. 5.6).

Fig. 5.6
Tensión de membrana en un dipòsit cilíndric.



Podem suposar que les tensions es distribueixen uniformement a tota la paret del cilindre, excepte als punts pròxims a les tapes. Per calcular σ_t , fem un tall longitudinal. La distribució de forces serà la que s'indica a la figura 5.7, on p és la pressió interior i e el gruix de la paret.

Fig. 5.7
Forces en un dipòsit cilíndric, tall longitudinal.



Per a l'equilibri de forces,

$$2\sigma_t e l = p 2r l$$

i, per tant,

$$\sigma_t = \frac{rp}{e}$$

Per calcular σ_l , fem un tall transversal a l'eix del cilindre i en separem la part de l'esquerra (fig. 5.8). Per l'equilibri de forces,

$$p\pi r^2 = \sigma_l 2\pi r e$$

i, per tant,

$$\sigma_l = \frac{rp}{2e}$$

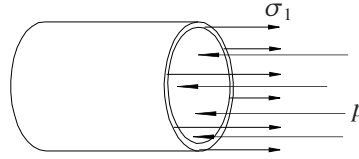


Fig. 5.8
Forces en un dipòsit
cilíndric, tall transversal.

Observem que

$$\sigma_t = 2\sigma_l$$

Per al cas de l'esfera, no hi ha distinció entre σ_t i σ_l ; escriurem simplement σ . Si observem la figura 5.9, veurem que es compleix

$$p\pi r^2 = \sigma 2\pi r e$$

i, per tant,

$$\sigma = \frac{rp}{2e}$$

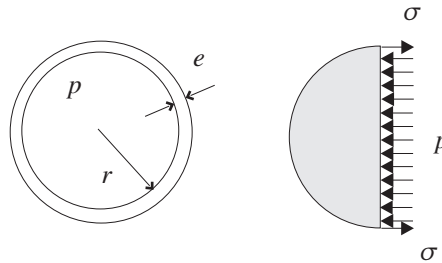


Fig. 5.9
Forces en un dipòsit
esfèric.

Observem que, per a e petit, la tensió de membrana σ és superior a la pressió p exercida pel fluid.

5.4. Problemes

En els problemes d'aquest capítol, no necessitem els eixos locals ja que la tensió és la mateixa en tots els punts de la secció transversal. En canvi, per la localització de la secció necessitem uns eixos globals, que designarem per X, Y, Z

Problema 5.1

Calculeu el desplaçament de l'extrem dret de la barra de la figura 13.45, que té un mòdul de Young E , secció transversal A i longitud l .



Fig. 5.10



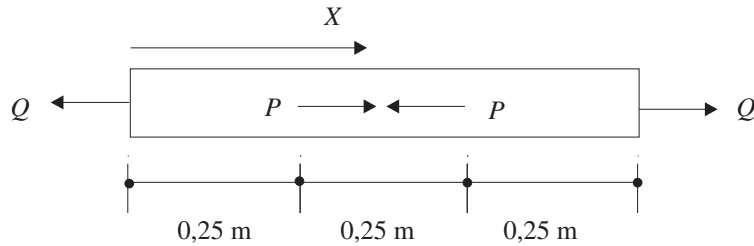
Solució:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dx = \frac{Pl}{EA}$$

Problema 5.2

Determineu l'allargament total de la barra d'acer de la figura. La secció transversal és de 6 cm^2 i està sotmesa a l'acció de les càrregues $Q = 50 \text{ kN}$ i $P = 25 \text{ kN}$. El mòdul de Young per a l'acer és $E = 196,2 \text{ GPa}$ (fig. 5.11).

Fig. 5.11



Solució:

Fem un tall dins de cada una de les regions per conèixer-ne els esforços normals N .

Regió I

Fig. 5.12

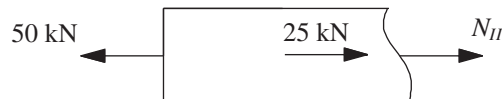


Fem un tall dins la regió i en separem el tros de l'esquerra (fig. 5.12). L'esforç normal és

$$N_I = 50 \text{ kN}$$

Regió II

Fig. 5.13



Fem un tall dins de la regió i en separem el tros de l'esquerra (fig. 5.13). L'esforç normal és

$$N_{II} = 25 \text{ kN}$$



Regió III



Fig. 5.14

Fem un tall dins de la regió i en separem el tros de la dreta (fig. 5.14). L'esforç normal és

$$N_{III} = 50 \text{ kN}$$

Les tres regions treballen a tracció. La variació de la longitud de barra d'acer és, substituint dades i anomenant X l'eix global centrat a l'extrem esquerre de la barra,

$$\Delta l = \int_0^{0,75} \frac{N}{EA} dx = \int_0^{0,25} \frac{N_I}{EA} dx + \int_{0,25}^{0,5} \frac{N_{II}}{EA} dx + \int_{0,5}^{0,75} \frac{N_{III}}{EA} dx = 0,026 \text{ cm}$$

Problema 5.3

Trobeu la variació de longitud de la barra de la figura 5.15. $P = 50 \text{ kN}$, $A = 2 \text{ cm}^2$, $l = 1 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

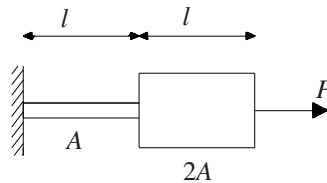


Fig. 5.15

Solució:

La variació de longitud de la barra és

$$\Delta l = \int_0^{2l} \frac{N}{AE} dx = \int_0^l \frac{N_I}{A_I E} dx + \int_0^l \frac{N_{II}}{A_{II} E} dx$$

tenim $N_I = N_{II} = P = 50 \text{ kN}$, $A_I = 2 \text{ cm}^2$, $A_{II} = 4 \text{ cm}^2$. Així,

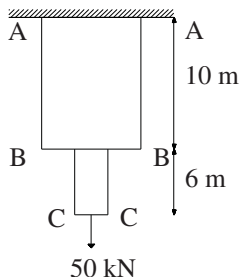
$$\Delta l = 0,18 \text{ cm}$$

Problema 5.4

Dues barres estan unides rígidament i suporten la càrrega que s'indica a la figura 5.16. La barra superior és d'acer, amb una densitat de $0,0078 \text{ kg/cm}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ i una secció transversal de 60 cm^2 . La inferior és de bronze amb una densitat de $0,008 \text{ kg/cm}^3$, $E = 9 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ i una secció transversal de 50 cm^2 . Trobeu les tensions màximes a cada material i el desplaçament de les seccions B i C.



Fig. 5.16



Solució:

El pes d'una barra prismàtica de secció transversal A , longitud l i densitat ρ és

$$w = mg = \rho A l g$$

per tant, el pes de la part BC (bronze) w_{BC} és

$$w_{BC} = 0,008 \text{ kg/cm}^3 \cdot 50 \text{ cm}^2 \cdot 600 \text{ cm} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 2.354,4 \text{ N}$$

i el de la part AB (acer)

$$w_{AB} = 0,0078 \text{ kg/cm}^3 \cdot 60 \text{ cm}^2 \cdot 1.000 \text{ cm} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 4.591,08 \text{ N}$$

Així, la reacció de la paret és

$$R_A = 4.591,08 \text{ N} + 2.354,4 \text{ N} + 50.000 \text{ N} = 56.945,48 \text{ N}$$

A la part AB, la tensió màxima es produeix a la paret, secció A, i val

$$\sigma_A = \frac{4.591,08 + 2.354,4 + 50.000}{60} = 949 \text{ N/cm}^2$$

A la part BC, la tensió màxima es produeix a la secció B, i val

$$\sigma_B = \frac{2.354,4 + 50.000}{50} = 1.047 \text{ N/cm}^2$$

El desplaçament de la secció B és la variació de longitud de la porció AB

$$\Delta_{AB} = d_B - d_A = d_B = \int_A^B \frac{N}{AE} dx$$

Per calcular Δ_{AB} , necessitem l'esforç normal N en una secció arbitrària de la porció AB; fent un tall i aïllant la part inferior (fig. 5.17),

$$N = 56.945,48 - 0,0078 \cdot 60 \cdot x \cdot 9,81 = 56.945,48 - 4,59x$$

així

$$d_B = \Delta_{AB} = \int_0^{1.000} \frac{56.945,48 - 4,59x}{60 \cdot 2,1 \cdot 10^7} dx = 0,045 \text{ cm}$$

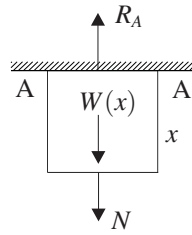


Fig. 5.17

Per calcular el desplaçament de la secció C, tenim

$$\Delta_{BC} = d_C - d_B = \int_B^C \frac{N}{AE} dx$$

L'esforç N , l'obtenim fent un tall a la porció BC i aïllant la part inferior (fig. 5.18),

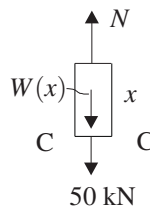


Fig. 5.18

$$N = 50.000 + 0,008 \cdot 50 \cdot x \cdot 9,81 = 50.000 + 3,92x$$

així

$$\Delta_{BC} = \int_0^{600} \frac{50.000 + 3,92x}{50 \cdot 9 \cdot 10^7} dx = 0,0069 \text{ cm}$$

per tant,

$$d_C = d_B + \Delta_{BC} = 0,045 \text{ cm} + 0,0069 \text{ cm} = 0,052 \text{ cm}$$

Problema 5.5

Trobeu l'allargament d'una barra vertical de longitud l i pes específic p , subjectada per l'extrem superior i sotmesa únicament al seu propi pes (fig. 5.19).

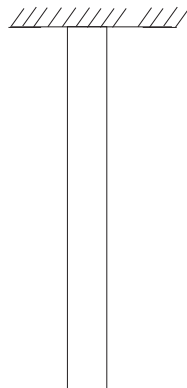
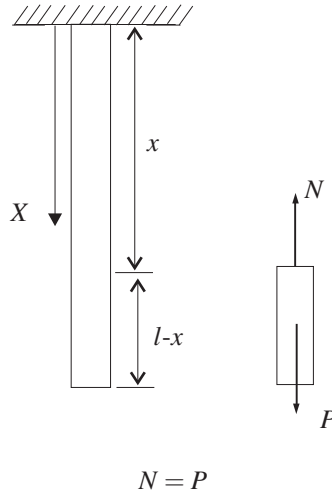


Fig. 5.19

Solució:

Fem un tall en una secció qualsevol de la barra i n'aïllem la part de baix (figura 5.20); aplicant l'estàtica

Fig. 5.20



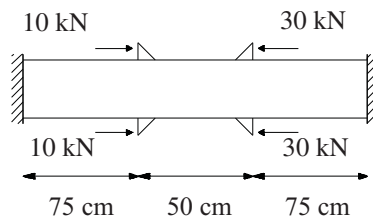
tenint en compte que $P = pA(l - x)$, s'obté

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{AE} dx = \int_0^l \frac{(l-x)Ap}{EA} dx = \frac{pl^2}{2E}$$

Problema 5.6

La barra de la figura 5.21 té una secció uniforme i està subjecta pels extrems, sense que existeixi cap esforç inicial. S'hi apliquen càrregues simètricament i es demana calcular els esforços que apareixeran en les diferents zones de la barra.

Fig. 5.21



Solució:

En el moment en què apliquem les càrregues, apareixen reaccions als encastaments. Hem suposat arbitràriament que R_A va cap a la dreta i R_B , cap a l'esquerra (fig. 5.22). L'única equació de l'estàtica que podem aplicar és

$$R_A + 20 = R_B + 60$$

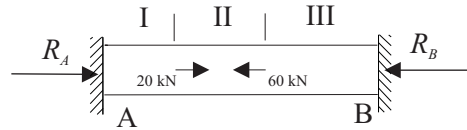


Fig. 5.22

Com que tenim dues incògnites, necessitem una altra equació, que obtindrem d'imposar la condició que l'increment de longitud de la barra ha de ser zero, ja que està encastada als dos extrems. Escriurem, doncs,

$$\Delta l = 0$$

$$\frac{N_I}{EA} 0,75 + \frac{N_{II}}{EA} 0,5 + \frac{N_{III}}{EA} 0,75 = 0$$

Fem un tall dins de cada una de les regions per conèixer-ne els esforços normals N .

Regió I (fig. 5.23)

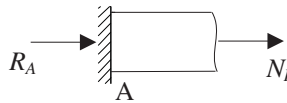


Fig. 5.23

L'esforç normal és

$$N_I = -R_A$$

Regió II (fig. 5.24)

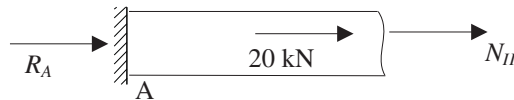


Fig. 5.24

L'esforç normal és

$$N_{II} = -R_A - 20$$

Regió III (fig. 5.25)

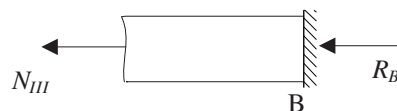


Fig. 5.25

L'esforç normal és

$$N_{III} = -R_B$$



Així doncs, el sistema d'equacions per resoldre és

$$\begin{aligned} R_A + 20 &= R_B + 60 \\ \frac{-R_A}{EA} 0,75 + \frac{-R_A - 20}{EA} 0,5 + \frac{-R_B}{EA} 0,75 &= 0 \end{aligned}$$

resolent, tenim

$$\begin{aligned} R_A &= 10 \\ R_B &= -30 \end{aligned}$$

així, els esforços són

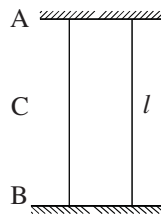
$$\begin{aligned} N_I &= -10 \\ N_{II} &= -30 \\ N_{III} &= 30 \end{aligned}$$

és a dir, la regió I i la II treballen a compressió i la III, a tracció.

Problema 5.7

La barra de la figura té una secció transversal S , una longitud l , un mòdul d'elasticitat E i un pes específic p (fig. 5.26). Està encastada pels extrems tal com s'indica. a) Trobeu les reaccions als encastaments. b) Esbrineu on hi ha tracció i on compressió c) Calculeu el desplaçament del punt C.

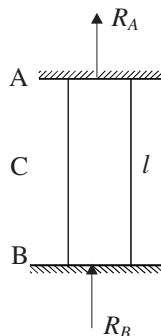
Fig. 5.26



Solució:

A la paret de dalt i a la de baix apareixeran reaccions verticals, que dibuixarem les dues cap amunt, perquè sembla lògic que així són (fig. 5.27). El que ja no és tan clar a priori és si les dues reaccions són iguals.

Fig. 5.27





Atès que la barra està encastada a dalt i a baix, en deixar que actuï el propi pes, les seccions transversals baixaran (no totes el mateix, és clar) però la longitud de la barra continuarà essent l , és a dir $\Delta l = 0$. Escriurem, doncs,

$$\Delta l = 0 = \int_0^l \frac{N}{AE} dx$$

L'esforç N el calculem fent un tall en una secció qualsevol a distància x de l'extrem superior (fig. 5.28) i n'obtenim

$$N = R_A - w = R_A - pAx$$

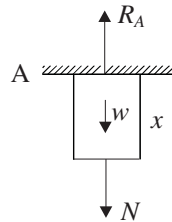


Fig. 5.28

Substituint

$$0 = \int_0^l \frac{R_A - pAx}{AE} dx$$

d'on s'obté

$$R_A = \frac{1}{2} pAl$$

és a dir, la meitat del pes. Per tant, la paret de baix suportarà l'altra meitat; aplicant l'estàtica a tota la barra

$$R_A + R_B = pAl$$

i substituint el valor trobat per a R_A , obtenim $R_B = \frac{1}{2} pAl$, és a dir, que les dues reaccions són iguals i iguals a la meitat del pes total de la barra.

Per saber on hi ha tracció i on compressió, expressem N en funció de x

$$N = R_A - pAx = \frac{1}{2} pAl - pAx = pA(l/2 - x)$$

Observem que, per $x < l/2$, és a dir, a la meitat de dalt de la barra, $N > 0$; per tant hi ha tracció i, a la meitat de baix, compressió. A la secció del mig (secció C), la N és zero. Per calcular el desplaçament de la secció C, podem calcular la variació de longitud de la porció de barra AC

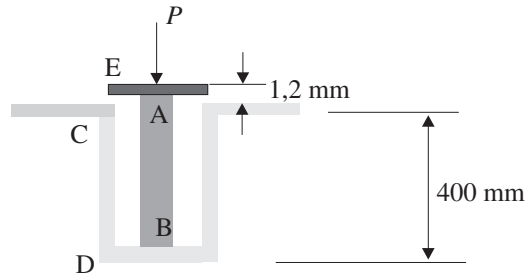
$$d_C = \int_0^{l/2} \frac{N}{AE} dx = \int_0^{l/2} \frac{pA(l/2 - x)}{AE} dx = pl^2/(8E)$$

que és un desplaçament cap avall.

Problema 5.8

Una vareta AB de llautó de 9 mm de diàmetre està connectada a la base d'un recipient cilíndric de llautó CD de secció transversal 300 mm^2 . El recipient CD està unit a un suport fix en C i un tap a l'extrem A de la barra. Sabent que el mòdul d'elasticitat E del llautó es de 85 GPa, trobeu la magnitud de P per tal que el desplaçament del tap sigui de 1,2 mm cap avall (fig. 5.29).

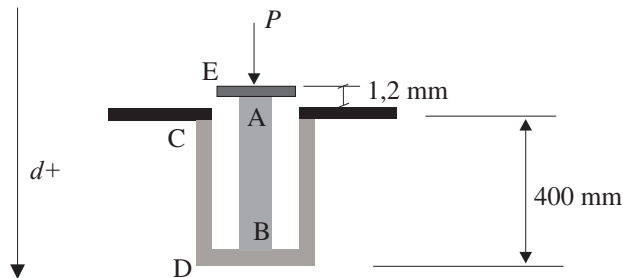
Fig. 5.29



Solució:

Primerament, fixem arbitràriament el sentit positiu dels desplaçaments cap avall (fig. 5.30).

Fig. 5.30



Els desplaçaments dels extrems de les barres estan lligats amb les variacions de longitud d'aquestes, és a dir, que hem de fer servir l'equació

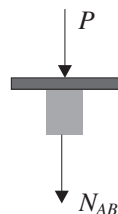
$$\Delta l = \frac{N}{EA} l \quad (5.6)$$

per a cada una de les dues barres: la vareta i el recipient cilíndric. Per tant, les quatre incògnites que tenim són: P, d_B, N_{AB}, N_{CD} ; necessitem, doncs, quatre equacions.

Equacions que s'obtenen de fer els talls a les barres

Fem un tall dins de cada una de les barres per conèixer els esforços normals N . Per a la vareta, tallant i aïllant-ne el tros de dalt (fig. 5.31).

Fig. 5.31





L'esforç normal és

$$N_{AB} = -P \quad (5.7)$$

Per al recipient cilíndric, fem un tall transversal a tota la peça i en separem el tros de baix (fig. 5.32). L'esforç normal és

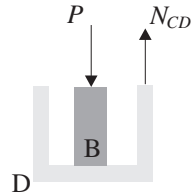


Fig. 5.32

$$N_{CD} = P \quad (5.8)$$

Observem que la regió I treballa a compressió i la regió II treballa a tracció.

Equacions que s'obtenen de lligar els desplaçaments amb les variacions de longitud

Ara lliguem les variacions de longitud Δl amb els desplaçaments

Per la vareta AB

$$\Delta l = d_B - d_A = \frac{N_{AB}}{EA_{AB}} l_{AB}$$

Substituint dades,

$$d_B - 1,2 = \frac{-P}{EA_{AB}} 401,2 \quad (5.9)$$

Per al recipient cilíndric CD

$$\Delta l = d_D - d_C = \frac{N_{CD}}{EA_{CD}} l_{CD}$$

Substituint dades, i tenint en compte que $d_C = 0$,

$$d_D = d_B = \frac{P}{EA_{CD}} 400 \quad (5.10)$$

Resolent 5.7, 5.8, 5.9 i 5.10, s'obté

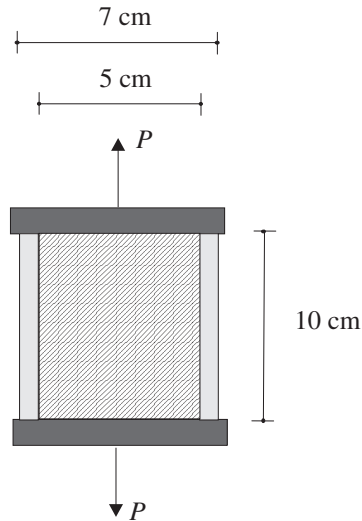
$$P = 13,35 \text{ kN}$$

Problema 5.9

Sigui un tub cilíndric massís d'alumini, $E = 28 \text{ GPa}$, envoltat per un altre tub d'acer, $E = 210 \text{ GPa}$ (fig. 5.33). El conjunt està sostingut per dues plaques indeformables als extrems, com s'indica a la figura. Trobeu l'allargament dels tubs. Preneu $P = 10 \text{ kN}$.



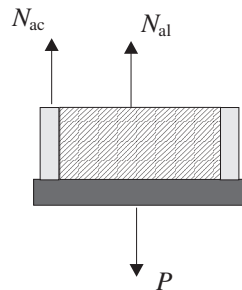
Fig. 5.33



Solució:

Si fem un tall i ens quedem amb la part inferior, tindrem (fig. 5.34)

Fig. 5.34



$$N_{al} + N_{ac} = P \quad (5.11)$$

Tenim dues incògnites, per la qual cosa necessitem una altra equació que ens permeti resoldre el problema. L'equació, l'obtindrem d'imposar que l'increment de longitud és el mateix per a un material que per a l'altre, ja que els dos materials estan connectats a través de la placa indeformable.

$$\Delta l_{al} = \Delta l_{ac} \quad (5.12)$$
$$\frac{N_{al}}{A_{al}E_{al}}l = \frac{N_{ac}}{A_{ac}E_{ac}}l$$

resolent 5.11 i 5.12, s'obté,

$$N_{al} = 1,210 \text{ kN}$$

$$N_{ac} = 8,780 \text{ kN}$$



essent la variació de longitud de la barra

$$\Delta l_{al} = \frac{N_{al}}{A_{al}E_{al}}l = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

Assenyalem que, evidentment, hauria donat el mateix si la variació de longitud l'haguéssim calculada per a l'acer, en comptes de per a l'alumini.

Problema 5.10

Un cargol de llautó, $E_{\text{car}} = 105 \text{ GPa}$, de 10 mm de diàmetre és introduït en un tub d'alumini $E_{\text{tub}} = 70 \text{ GPa}$ de 18 mm de diàmetre exterior i 3 mm de gruix de paret. Després que la femella ha estat ajustada al màxim, es cargola $1/4$ de volta. Sabent que el cargol té un pas de rosca de 2 mm, trobeu els esforços en el cargol i en el tub (fig. 5.35).

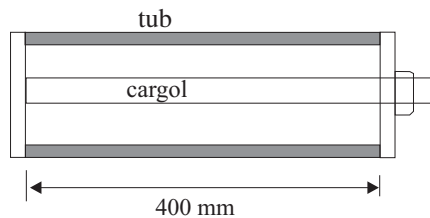


Fig. 5.35

Solució:

Primerament, fixem arbitràriament el sentit positiu dels desplaçaments cap a la dreta (fig. 5.36). Els desplaçaments dels extrems de les barres estan lligats amb les seves variacions de longitud, és a dir, que hem de fer servir l'equació

$$\Delta l = \frac{N}{EA}l$$

per a cada una de les dues barres: el cargol i el tub. Per tant, les tres incògnites que tenim són: d_{femella} , N_{car} , N_{tub} ; necessitem, doncs, tres equacions.

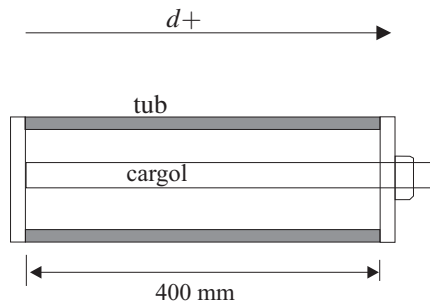


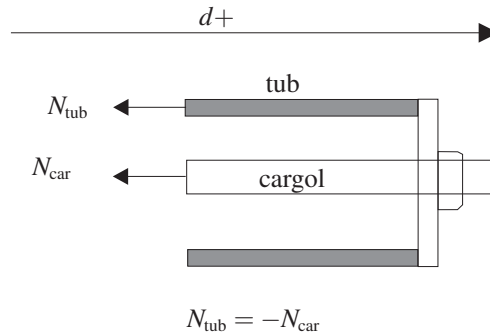
Fig. 5.36

Equacions que s'obtenen de fer els talls a les barres:

Tan sols podem fer un tall; ens quedem amb la part de la dreta i tenim (fig. 5.37)



Fig. 5.37



Fixem-nos que aquesta equació implica que un material treballa a tracció i l'altre, a compressió, però no especifica quin experimenta una cosa i quin l'altra.

Equacions que s'obtenen de lligar els desplaçaments amb les variacions de longitud:

Per al tub, tenim

$$\Delta l_{\text{tub}} = \frac{N_{\text{tub}}}{E_{\text{tub}} A_{\text{tub}}} l_{\text{tub}}$$

Tenint en compte que $\Delta l_{\text{tub}} = d_{\text{femella}}$

$$d_{\text{femella}} = \frac{N_{\text{tub}}}{E_{\text{tub}} A_{\text{tub}}} l_{\text{tub}} \quad (5.14)$$

i per al cargol

$$\Delta l_{\text{car}} = \frac{N_{\text{car}}}{E_{\text{car}} A_{\text{car}}} l_{\text{car}}$$

tenint en compte que $d_{\text{femella}} = -0,5 + \Delta l_{\text{car}}$ i que la longitud és la mateixa per als dos casos, 400 mm, s'obté

$$d_{\text{femella}} + 0,5 = \frac{N_{\text{car}}}{E_{\text{car}} A_{\text{car}}} l_{\text{car}} \quad (5.15)$$

Resolent 5.13, 5.14 i 5.15, s'obté

$$N_{\text{car}} = 5,62 \text{ kN} \quad N_{\text{tub}} = -5,62 \text{ kN}$$

Problema 5.11

La barra rígida ABC està articulada en C, suportada per una barra BE d'acer de 30 mm de diàmetre i per una barra AD d'alumini de 20 mm de diàmetre. La femella en A està cargolada una volta sobre un pern que té un pas d'1 mm. Trobeu els esforços en les barres d'alumini i d'acer (fig. 5.38). Preneu $E_{\text{ac}} = 205 \text{ GPa}$ i $E_{\text{al}} = 70 \text{ GPa}$.

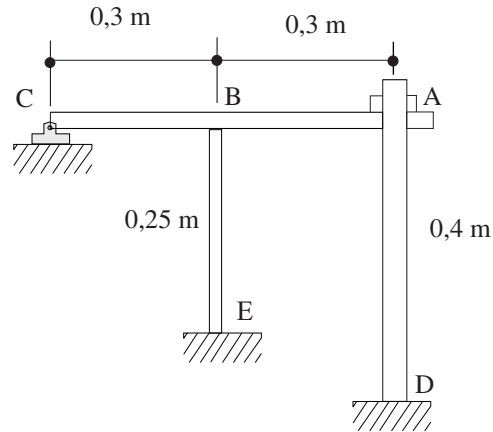


Fig. 5.38

Solució:

Dibuixem arbitràriament les reaccions (fig. 5.39), i suposem, també arbitràriament, que la barra ABC gira al voltant del punt C en sentit horari. Prenem sentit positiu cap avall per als desplaçaments, tal com s'indica a la figura.

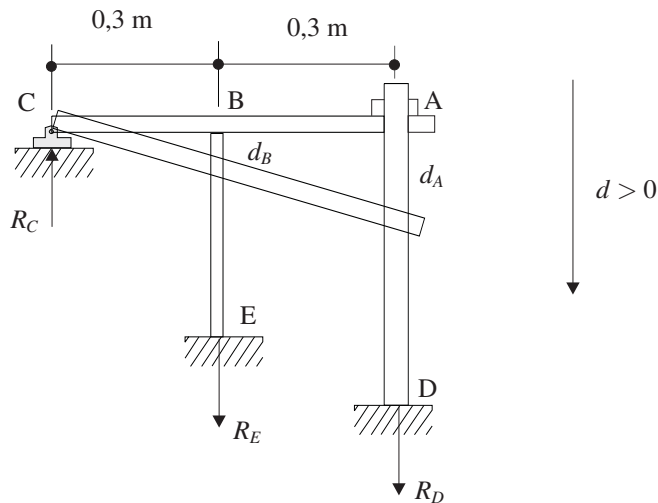


Fig. 5.39

Podem prendre com a incògnites les següents: les tres reaccions R_D , R_E , R_C ; el desplaçament de la femella d_A ; el desplaçament del punt B d_B , i els esforços a les barres N_{AD} , N_{BE} . En total, tenim set incògnites. Necessitem, doncs, set equacions.

Equacions que s'obtenen d'aplicar l'equilibri al conjunt

Són dues equacions

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_C = R_D + R_E \quad (5.16)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_E \cdot 0.3 + R_D \cdot 0.6 = 0 \quad (5.17)$$



Equacions que s'obtenen de fer els talls a les barres

Fent un tall a cada una de les barres i aïllant-ne la part de baix, tenim

$$N_{AD} = R_D \quad (5.18)$$

$$N_{BE} = R_E \quad (5.19)$$

Equacions que s'obtenen de lligar els desplaçaments amb les variacions de longitud

El desplaçament de la femella d_A és 1 mm cap avall, menys l'increment de longitud de la barra AD, és a dir

$$d_A = 1 \text{ mm} - \Delta l_{AD}$$

Fixem-nos que aquesta equació és vàlida tant si la barra AD s'allarga com si s'escurça, tot i que sembla evident que la barra treballa a tracció i, per tant, s'allarga. L'equació de l'increment de longitud és

$$\Delta l_{AD} = \frac{N_{AD}}{E_{AD}A_{AD}} l_{AD}$$

per tant,

$$d_A = 1 \text{ mm} - \frac{N_{AD}}{E_{AD}A_{AD}} l_{AD} \quad (5.20)$$

per la barra BE de la dreta, tenim simplement

$$\Delta l_{BE} = -d_B = \frac{N_{BE}}{E_{BE}A_{BE}} l_{BE} \quad (5.21)$$

el signe menys és per tenir en compte el sentit positiu que hem pres per als desplaçaments, de manera que, si la barra s'escurça, el desplaçament ha de ser positiu.

Equacions que s'obtenen de la geometria del problema. Equacions de lligadura geomètrica

Tenint en compte la semblança de triangles

$$\frac{d_A}{0,6} = \frac{d_B}{0,3} \quad (5.22)$$

Resolent 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 i 5.22, s'obté

$$N_{AD} = 144 \text{ kN}$$

$$N_{BE} = -288 \text{ kN}$$

Observem que la barra AD treballa a tracció i la BE, a compressió.



Problema 5.12

Sotmetem la barra de la figura a una variació de temperatura ΔT . Calculeu les reaccions externes i el desplaçament d'un punt qualsevol de la barra (figura 5.40).

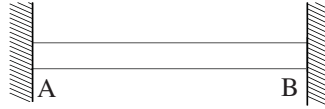


Fig. 5.40

Solució:

En aplicar una variació de temperatura, sigui un escalfament o un refredament, apareixeran reaccions externes en A i en B. Dibuixem-les arbitràriament (fig. 5.41)

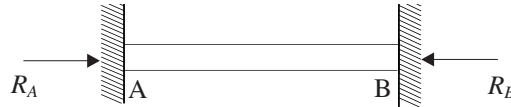


Fig. 5.41

Les equacions d'equilibri se segueixen complint, hi hagi o no variació de temperatura. De l'equilibri aplicat a la barra, se n'obté

$$R_A = R_B$$

Com que la barra està fixada en els dos extrems, la variació de longitud serà zero. L'esforç N és el mateix al llarg de la barra; per tant, escriurem

$$\Delta l = 0 = \frac{N}{EA} l + \alpha \Delta T \cdot l$$

Fent un tall en una secció qualsevol de la barra se n'obté $N = -R_A$ (fig. 5.42)

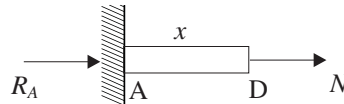


Fig. 5.42

Per tant,

$$0 = \frac{-R_A}{EA} l + \alpha \Delta T \cdot l$$

$$R_A = \alpha \Delta T A E$$

Observem que, si el que tenim és un augment de temperatura, llavors les reaccions $R_A = R_B$ seran positives, és a dir, tindran els sentits que hem suposat; per tant, la barra treballarà a compressió, i a l'inrevés. Per calcular el desplaçament d'una secció qualsevol D de la barra situada a distància x de l'extrem esquerre calculem la variació de longitud del tros AD.

$$d_D = \Delta l_{AD} = \int_0^x \left(\frac{N}{EA} + \alpha \Delta T \right) dx = \int_0^x \left(\frac{-R_A}{EA} + \alpha \Delta T \right) dx$$

i, substituint el valor de R_A trobat, s'obté

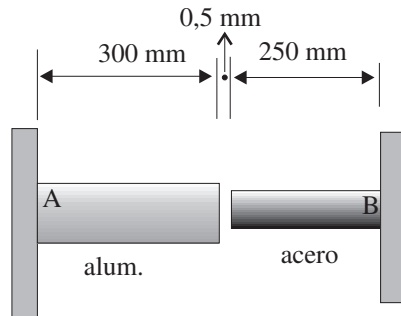
$$d_D = 0$$

és a dir, cap secció de la barra es desplaça.

Problema 5.13

A la temperatura ambient de 20°C hi ha una separació de 0,5 mm entre els extrems de les barnilles de la figura 5.43. Més tard, quan la temperatura arribi als 140°C , trobeu: a) l'esforç normal a l'alumini, b) la longitud exacta de la barra d'alumini. Per l'alumini, $A = 2.000\text{ mm}^2$, $E = 70\text{ GPa}$, $\alpha = 23 \cdot 10^{-6} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$. Per l'acer, $A = 800\text{ mm}^2$, $E = 190\text{ GPa}$, $\alpha = 18 \cdot 10^{-6} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$.

Fig. 5.43



Solució:

Es complirà

$$\Delta l_{al} + \Delta l_{ac} = 0,5\text{ mm}$$

Tenint en compte que, durant el procés apareixen esforços normals, escriurem

$$\frac{N_{al}}{E_{al}A_{al}} l_{al} + \alpha_{al} \Delta t \cdot l_{al} + \frac{N_{ac}}{E_{ac}A_{ac}} l_{ac} + \alpha_{ac} \Delta t \cdot l_{ac} = 0,5\text{ mm}$$

i, com que $N_{al} = N_{ac} = R_A$, la qual cosa es pot veure fent un tall indistintament a l'alumini o a l'acer i aïllant-ne la part de l'esquerra, tindrem

$$\frac{R_A}{E_{al}A_{al}} l_{al} + \alpha_{al} \Delta t \cdot l_{al} + \frac{R_A}{E_{ac}A_{ac}} l_{ac} + \alpha_{ac} \Delta t \cdot l_{ac} = 0,5\text{ mm}$$

i, substituint dades i tenint en compte que $\Delta t = 120^\circ$, obtenim

$$R_A = -229,6\text{ kN}$$



L'increment de longitud per a l'alumini serà

$$\Delta l_{al} = \frac{R_A}{E_{al} A_{al}} l_{al} + \alpha_{al} \Delta t \cdot l_{al}$$

i substituint,

$$\Delta l_{al} = 0,3 \text{ mm}$$

d'on la longitud final serà $l_{al} = 300,3 \text{ mm}$.

Problema 5.14

La barra ACB de la figura 5.44 encaixa, de manera ajustada, entre els dos suports quan la temperatura és 25°C . Un cop encaixada, es fixa pels seus extrems. Trobeu els esforços a la barra quan la temperatura sigui -50°C . $E = 200 \text{ GPa}$ i $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-1}$. Trobeu també el desplaçament de la secció C en efectuar aquest refredament.

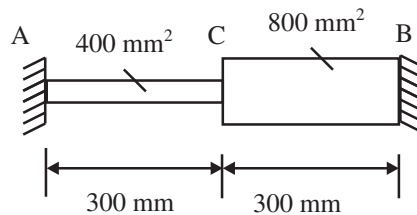


Fig. 5.44

Solució:

Quan es refreda a -50°C , la barra tendeix a escurçar-se però, en trobar-se fixada pels extrems, no pot fer-ho i apareixen esforços axials, que seran de tracció. Podríem dir que l'escurçament degut al refredament és contrarestat per l'allargament degut a la tracció.

Per esbrinar els esforços a -50°C , fem, com sempre, talls a les regions de la barra (fig. 5.45) (observem que, tant si hi ha variació de temperatura com si no, les equacions d'equilibri es continuen complint).

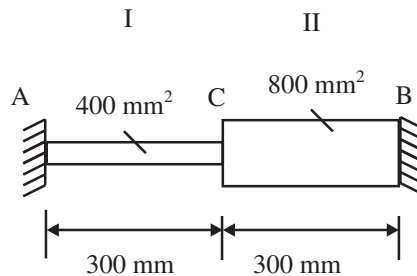


Fig. 5.45

A la regió I, tenim $N_I = R_A$ (fig. 5.46).

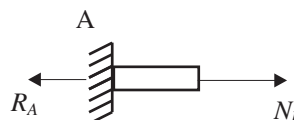
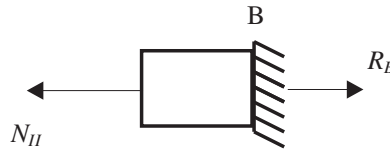


Fig. 5.46

A la regió II, tenim $N_{II} = R_B$ (fig. 5.47),

Fig. 5.47



La variació total de longitud de la barra és zero, ja que està fixada pels dos extrems; per tant, escriurem

$$\begin{aligned} \Delta l = 0 &= \int_A^C \left(\frac{N_I}{A_I E_I} + \alpha_I \Delta T \right) dx + \int_C^B \left(\frac{N_{II}}{A_{II} E_{II}} + \alpha_{II} \Delta T \right) dx \\ 0 &= \int_0^{0,3} \left(\frac{R_A}{4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2} + 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1} (-75^\circ \text{ C}) \right) dx + \\ &\quad \int_0^{0,3} \left(\frac{R_B}{8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2} + 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1} (-75^\circ \text{ C}) \right) dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

D'altra banda, tenim, de l'estàtica aplicada al conjunt

$$R_A = R_B \quad (5.24)$$

Resolent 5.24 i 5.23, s'obté

$$N_I = N_{II} = 96.000 \text{ N}$$

El desplaçament de la secció C, l'obtenim calculant la variació de longitud de la porció AC

$$\begin{aligned} d_C = \Delta l_{AC} &= \int_A^C \left(\frac{N_I}{A_I E_I} + \alpha_I \Delta T \right) dx \\ &= \int_0^{0,3} \left(\frac{96.000 \text{ N}}{4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2} + 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1} (-75^\circ \text{ C}) \right) dx = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m} \end{aligned}$$

que és un desplaçament cap a la dreta ja que, en sortir positiu, la barra AC s'allarga.

Problema 5.15

La barra de la figura 5.48 consta d'una barnilla de llautó adherida a un tub d'acer. Els coeficients de dilatació tèrmica per al llautó i per a l'acer són, respectivament, $\alpha_{lla} = 19 \cdot 10^{-6} (^\circ \text{ C})^{-1}$ i $\alpha_{ac} = 12 \cdot 10^{-6} (^\circ \text{ C})^{-1}$, mentre que els mòduls de Young són $E_{lla} = 105 \text{ GPa}$ i $E_{ac} = 210 \text{ GPa}$. Quins seran els esforços que apareixeran en cadascun dels materials quan sotmetem la barra a un escalfament de 25° C ?

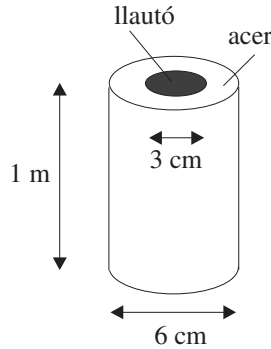


Fig. 5.48

Solució:

Si fem un tall i n'aïllem la part superior, tindrem (fig. 5.49)

$$N_a = -N_l \quad (5.25)$$

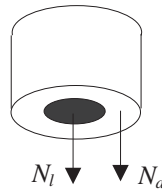


Fig. 5.49

Fixem-nos que aquesta equació implica que un material treballa a tracció i l'altre a compressió, però no especifica quin experimenta una cosa i quin l'altra. Tenim dues incògnites, per la qual cosa necessitarem una altra equació que ens permeti resoldre el problema. L'equació l'obtidrem d'imposar que l'increment de longitud és el mateix per a un material que per a l'altre, ja que estan soldats rígidament; tampoc no sabem a priori si aquest increment de longitud serà positiu o negatiu.

$$\Delta l_a = \Delta l_l \quad (5.26)$$

$$\frac{N_a}{A_a E_a} + \alpha_a \Delta T = \frac{N_l}{A_l E_l} + \alpha_l \Delta T$$

resolent 5.25 i 5.26, s'obté

$$N_a = 11,13 \text{ kN}$$

$$N_l = -11,13 \text{ kN}$$

és a dir, l'acer treballarà a tracció i el llautó a compressió, essent la variació de longitud de la barra

$$\frac{N_a}{A_a E_a} + \alpha_a \Delta T = 0,032 \text{ cm}$$

Assenyalem que, evidentment, hauria donat el mateix si la variació de longitud l'haguéssim calculada per al llautó, en comptes de per a l'acer.



Flexió pura

Prenem els eixos locals de la manera següent: l'origen de coordenades al centroide de la secció transversal; l'eix X en la direcció de l'eix de la barra, i Y, Z sobre la secció transversal i coincidint amb els eixos principals d'inèrcia de la secció. S'entén per *flexió pura* la situació en la qual en les seccions transversals tan sols actua un moment flector. Si la direcció del moment flector coincideix amb un eix principal d'inèrcia, la flexió s'anomena *recta*, si no, *desviada* (fig. 6.1). Analitzem, en primer lloc, una flexió recta.

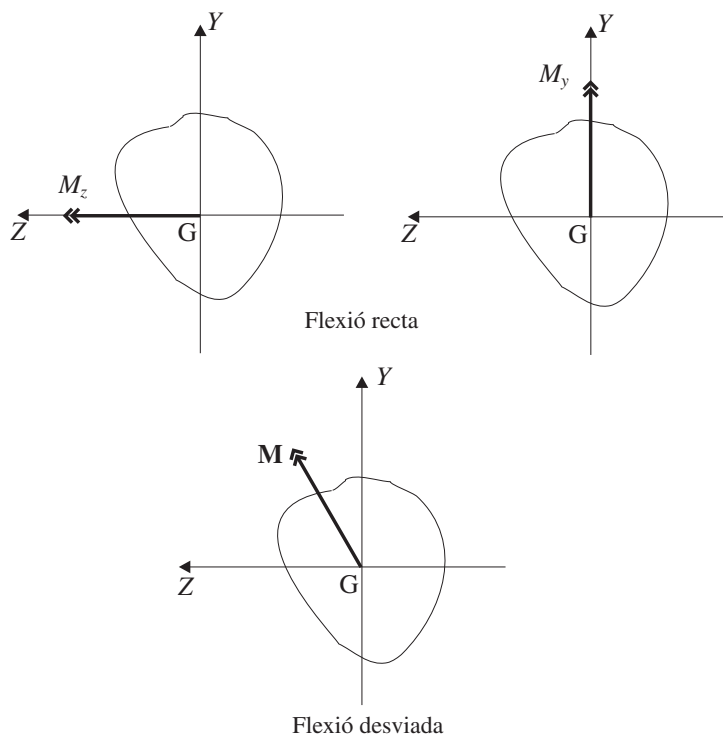


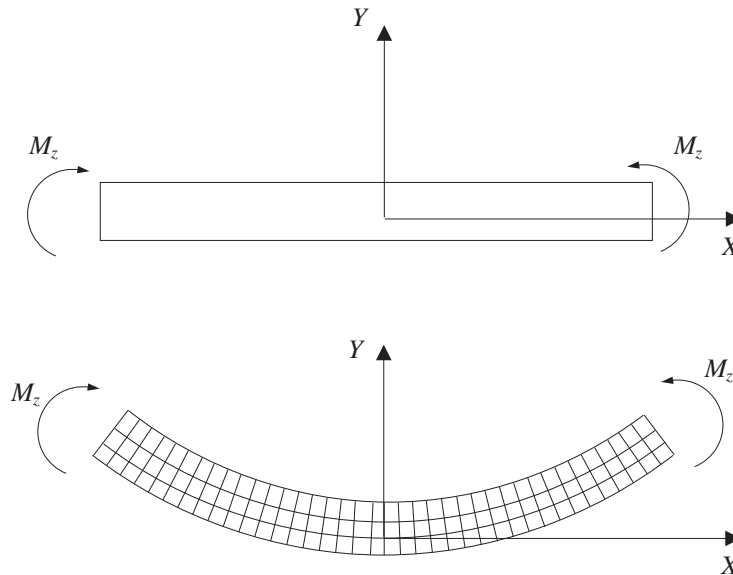
Fig. 6.1
Tipus de flexió.

6.1. Flexió recta

L'anàlisi de la flexió recta és semblant a la que hem fet per a la tracció o compressió; en comptes d'una força a cada extrem de la barra, el que hi ha és un moment flector. Per comoditat del lector, repetirem alguns arguments que ja hem presentat oportunament.

Considerem una barra rectilínia en l'estat no deformat (fig. 6.2) i, en ella, uns eixos locals X, Y, Z , tal com els hem definit. Suposem ara que als dos extrems s'aplica un moment flector en la direcció z , M_z . En aquest cas, com també passava en la tracció o la compressió pura, les seccions transversals es mantenen planes i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat. Això es pot comprovar observant la figura 6.2; com que a totes les seccions transversals hi ha el mateix esforç, únicament un moment flector, totes elles es deformaran de la mateixa manera. Però, per simetria, la secció del mig es manté plana; per tant, totes les seccions es mantindran també planes. Per simetria, es pot comprovar també que les seccions es mantenen perpendiculars a la línia de centroides; això implica que les deformacions angulars i, per tant les tensions de cisallament, són zero en aquesta situació, és a dir, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$.

Fig. 6.2
Flexió pura recta.



Com que totes les seccions es deformen igual, en totes elles hi ha la mateixa distribució de tensions; podem fixar-nos, doncs, en qualsevol d'elles; per exemple la secció central. Si prenem un petit element de gruix ds al voltant d'un punt d'aquesta secció, en produir-se la flexió en varia el gruix, que s'allarga o s'escurça depenent de si està situat per sota o per sobre del centroide de la secció. És a dir, apareixen tensions normals en direcció tangent a la línia de centroides de l'estat deformat, que no coincideix amb l'eix X per poc que ens apartem de la secció central. D'altra banda, no apareixen tensions de cisallament, com ja hem dit.

En cas de desplaçaments i deformacions molt petits, podem considerar que la línia de centroides en l'estat deformat coincideix, aproximadament, amb l'eix X , és a dir, que

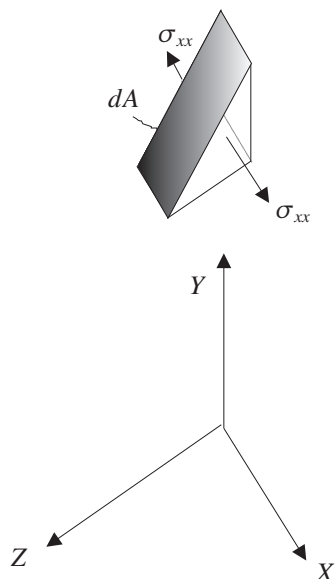


Fig. 6.3

el seu pendent és molt petit (això no implica que la curvatura, que està lligada amb la segona derivada i no amb la primera, com el pendent, hagi de ser també igual de petita). Per tant, podem considerar, quan tenim desplaçaments i deformacions molt petits, que les tensions normals que apareixen van en la direcció de X ; designem-les per σ_{xx} .

Pel que fa a les tensions σ_{yy} i σ_{zz} , observem que, en el contorn lateral de la barra, com que no hi ha càrregues aplicades no hi ha tensió, ni normal ni de cisallament. Prenem un element petit del contorn de superfície dA (fig. 6.3); si sobre dA no hi ha tensió de cap mena i tampoc no hi ha tensions de cisallament sobre cap cara, llavors σ_{yy} i σ_{zz} han de ser zero en els punts propers al contorn lateral i, per tant, també en els elements del costat. Podem continuar el raonament per contigüïtat i comprovarem que, a tots els punts de la secció transversal, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$.

D'altra banda, l'aproximació esmentada ens permet aplicar l'equilibri en l'estat no deformat per calcular els esforços a les seccions transversals, en comptes de fer-ho a l'estat deformat, que seria el més correcte, però ens obligaria a considerar els esforços com a incògnites.

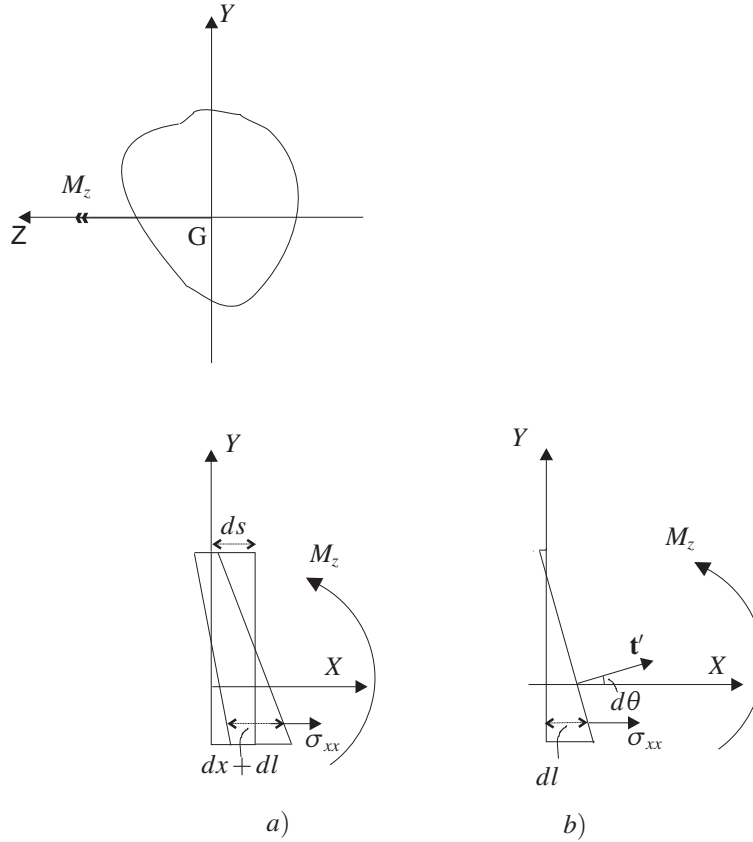
Calculem ara σ_{xx} , que és l'única tensió que hi ha, com hem vist. Considerem un element diferencial limitat per dues seccions transversals separades ds de la barra rectilínia en el seu estat no deformat (fig. 6.4). En produir-se la flexió, les seccions giren i, possiblement, es traslladen de manera que una fibra de longitud ds abans de la deformació passa a mesurar $ds + dl$ després de la deformació, és a dir, la seva longitud ha variat dl (fig. 6.4, a).

Amb les aproximacions esmentades, la deformació normal u_{xx} és

$$u_{xx} = \frac{dl}{ds} \quad (6.1)$$



Fig. 6.4
Gir de les seccions
transversals en la flexió:
a) gir absolut, b) gir
relatiu.



Si suposem que existeix linealitat entre σ_{xx} i u_{xx} , és a dir, es compleix la llei de Hooke, tenint en compte que $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, segons 5.14 es complirà

$$\sigma_{xx} = E u_{xx}$$

on E és el mòdul de Young, característic de cada material.

Si considerem el desplaçament relatiu dels extrems de la fibra en comptes de l'absolut, obtenim la posició relativa de dues seccions transversals molt pròximes (fig. 6.4, b). Com que suposem que cada punt de la secció experimenta un desplaçament tan sols en la direcció X , la rotació diferencial $d\theta$, és a dir, la diferència de rotacions entre dues seccions transversals molt properes en produir-se la deformació serà l'angle entre l'eix X i el vector normal al pla d'equació

$$dl = A_0 y + B_0 z + C_0 \quad (6.2)$$

Així, si designem per \mathbf{t}' el vector unitari perpendicular a aquest pla, el vector rotació diferencial $d\vec{\theta}$ s'escriurà com

$$d\vec{\theta} = \mathbf{i} \times \mathbf{t}' \quad (6.3)$$

Calculem els coeficients d'aquest pla relatiu donat per 6.2. Tenint en compte 6.1 i 6.2, podem escriure

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{ds}(A_0y + B_0z + C_0) \quad (6.4)$$

El conjunt de tensions σ_{xx} ha de ser equivalent al moment m_z respecte de G ; això implica dues coses: que la resultant de les tensions ha de ser zero i que el moment resultant de les tensions respecte al punt G ha de ser M_z .

De l'equivalència de forces horitzontals

$$\int_A \sigma_{xx} dA = 0$$

i, substituint 6.4,

$$\int_A \frac{E}{ds}(A_0y + B_0z + C_0) dA = 0$$

$$\frac{E}{ds} \left(A_0 \int_A y dA + B_0 \int_A z dA + C_0 \int_A dA \right) = 0$$

Per hipòtesi, els eixos Y i Z són eixos centrals; això significa que

$$\int_A y dA = 0$$

$$\int_A z dA = 0$$

Així doncs,

$$C_0 = 0$$

Del principi d'equivalència de moments respecte de G ,

$$\int_A \mathbf{r} \times (\sigma_{xx} dA) \mathbf{i} = M_z \mathbf{k}$$

que, en components, s'escriurà com

$$\int_A \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dl & y & z \\ \sigma_{xx} & 0 & 0 \end{vmatrix} dA = \int_A \sigma_{xx} \begin{vmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ y & z \end{vmatrix} dA = M_z \mathbf{k}$$

Les dues components del vector resultant han de ser zero; igualant a M_z la component \mathbf{k} i substituint 6.4,

$$-\frac{E}{ds} \int_A (A_0y + B_0z + C_0)y dA = M_z$$

$$-A_0 \int_A y^2 dA - B_0 \int_A yz dA - C_0 \int_A y dA = 0$$

La primera integral és el moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix Z ; la segona integral és zero, pel fet que els eixos s'han pres com a principals d'inèrcia, i la tercera integral és zero, pel fet que els eixos passen pel centroide; així doncs,

$$A_0 = -\frac{M_z ds}{EI_z}$$

Igualant a zero la component \mathbf{j} ,

$$\frac{E}{ds} \int_A (A_0 y + B_0 z + C_0) z dA = 0$$

$$A_0 \int_A zy dA + B_0 \int_A z^2 dA + C_0 \int_A z dA = 0$$

La primera integral és zero, pel fet que els eixos s'han pres com a principals; la segona integral és el moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix Y , i la tercera integral és zero, pel fet que els eixos passen pel centroide; així doncs

$$B_0 = 0$$

Amb els resultats obtinguts, l'equació del pla deformat serà

$$dl = \frac{-M_z ds}{EI_z} y$$

que correspon a un pla paral·lel a l'eix Z i que el conté, és a dir, *un pla que ha girat al voltant de l'eix Z* , el qual serà, doncs, l'eix de rotació o *línia neutra*.

La deformació normal u_{xx} en cada punt de la secció és

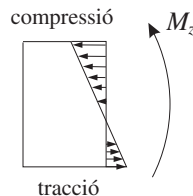
$$u_{xx} = \frac{dl}{ds} = -\frac{M_z}{EI_z} y$$

i la tensió σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_z} y \quad (6.5)$$

El producte EI_z s'anomena *rigidesa a la flexió* de la barra. La tensió és zero en el centroide G ($y = 0$) i màxima en els extrems de la secció. Per al cas $M_z > 0$, hi ha tracció a les fibres situades per sota del centroide i compressió a les situades per sobre d'ell (fig. 6.5). Per al cas $M_z < 0$, a l'inrevés.

Fig. 6.5
Distribució de tensions
en una flexió recta per al
cas $M_z > 0$.



D'altra banda, el vector \mathbf{t}' (fig. 6.4b), és

$$\mathbf{t}' = \frac{\left(1, \frac{M_z ds}{EI_z}, 0\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{M_z ds}{EI_z}\right)^2}}$$

que, negligint infinitèsims d'ordre superior, es pot escriure com

$$\mathbf{t}' = \left(1, \frac{M_z ds}{EI_z}, 0\right)$$

Així, segons 6.3,

$$\mathbf{d}\vec{\theta} = \mathbf{i} \times \mathbf{t}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{M_z ds}{EI_z} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_z ds}{EI_z} \mathbf{k}$$

i el *vector rotació unitària* $\frac{\mathbf{d}\vec{\theta}}{ds}$ val

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\theta}}{ds} = \frac{M_z}{EI_z} \mathbf{k}$$

La curvatura de la línia de centroides, la determinarem més endavant, en tractar de la flexió desviada, considerant la flexió recta com un cas particular de flexió desviada.

6.2. Flexió desviada

En el cas d'una flexió desviada, sobre la secció transversal actua un moment flector amb components sobre els dos eixos principals Y i Z (fig. 6.6). Aquesta situació es dona perquè les càrregues externes tenen components en els dos eixos.

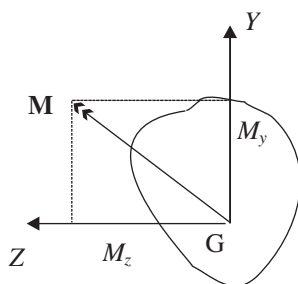


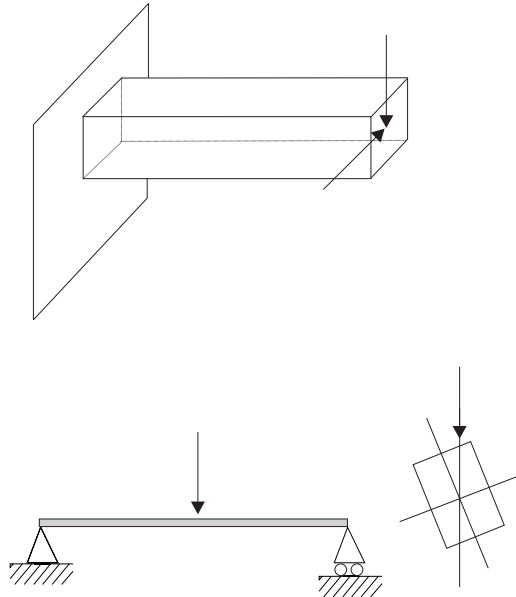
Fig. 6.6
Flexió desviada.

A la figura 6.7, es mostren dues situacions típiques de flexió desviada. Aplicant el principi de superposició, la tensió en cada punt és la suma de les tensions produïdes per M_z i M_y ; així doncs, tenint en compte 6.5,

$$\sigma_{xx} = \frac{-M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z \quad (6.6)$$

El segon terme és positiu perquè l'efecte de M_y ha de ser de tracció per a valors de z positius (en el cas de $M_y > 0$).

Fig. 6.7
Exemples de flexió
desviada.

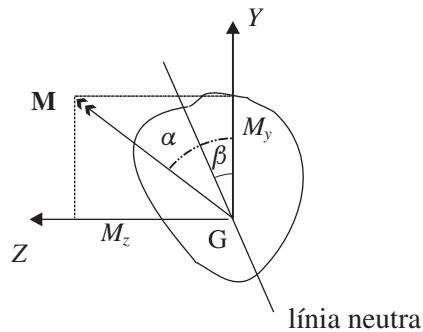


La línia neutra, que és l'eix de rotació al voltant del qual gira la secció, es troba fent $\sigma_{xx} = 0$ a l'equació anterior

$$0 = \frac{-M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

z i y seran, en aquesta equació, les coordenades dels punts de la línia neutra (fig. 6.8)

Fig. 6.8
Línia neutra en la flexió
desviada.



De l'equació de la línia neutra, es dedueix que passa per l'origen de coordenades (el centroide de la secció) i que passa també pel mateix quadrant que el vector moment:



suposant que tant M_y com M_z siguin positius, y i z han de ser tots dos positius o tots dos negatius. Podem obtenir una relació entre els angles α i β

$$\frac{M_z}{I_z}y = \frac{M_y}{I_y}z$$

$$\frac{M_z}{M_y} = \frac{zI_z}{yI_y}$$

$$\tan \beta = \tan \alpha \frac{I_z}{I_y}$$

equació que ens indica que, si $I_z > I_y$, llavors $\beta > \alpha$, és a dir, que *la línia neutra queda situada entre el vector moment i l'eix respecte del qual el moment d'inèrcia és més petit*. El qualificatiu de “desviada” per a aquest tipus de flexió s'explica perquè la línia neutra està “desviada” respecte del vector moment.

Els punts on es produeixen les tensions màximes són aquells que estan més allunyats de la línia neutra, en ser aquesta l'eix de rotació. Els valors de les tensions màximes els obtindrem substituint les seves coordenades a 6.6.

Per obtenir la curvatura en cada punt, disposem de l'equació del pla donat per 6.2, que en aquest cas és

$$dl = -\frac{M_z ds}{EI_z}y + \frac{M_y ds}{EI_y}z$$

o bé

$$dl + \frac{M_z ds}{EI_z}y - \frac{M_y ds}{EI_y}z = 0$$

Així doncs, el vector unitari \mathbf{t}' (a la figura 6.4, b està dibuixat el vector \mathbf{t}' per a una flexió recta) serà

$$\mathbf{t}' = \frac{\left(1, \frac{M_z ds}{EI_z}, -\frac{M_y ds}{EI_y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{M_z ds}{EI_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y ds}{EI_y}\right)^2}}$$

negligint els infinitsims de segon ordre, tenim per a \mathbf{t}'

$$\mathbf{t}' = \left(1, \frac{M_z ds}{EI_z}, -\frac{M_y ds}{EI_y}\right)$$

substituint a 6.3, obtenim

$$\mathbf{d}\vec{\theta} = \mathbf{i} \times \mathbf{t}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{M_z ds}{EI_z} & -\frac{M_y ds}{EI_y} \end{vmatrix} = \frac{M_y ds}{EI_y} \mathbf{j} + \frac{M_z ds}{EI_z} \mathbf{k}$$



i el vector rotació unitària $\frac{d\vec{\theta}}{ds}$ valdrà

$$\frac{d\vec{\theta}}{ds} = \frac{M_y}{EI_y} \mathbf{j} + \frac{M_z}{EI_z} \mathbf{k} \quad (6.7)$$

El vector de curvatura de la línia de centroides en l'estat deformat es defineix com a $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$, essent \mathbf{t} el vector unitari tangent a la línia i s , la coordenada curvilínia sobre la mateixa línia. Com que estem considerant que la barra és rectilínia a l'estat no deformat, $d\theta$ coincideix amb l'angle entre dues seccions molt properes a l'estat deformat. Així doncs, podem escriure

$$d\mathbf{t} = d\vec{\theta} \times \mathbf{t}$$

dividint per ds (no derivant respecte de s), obtenim

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\vec{\theta}}{ds} \times \mathbf{t}$$

Per al cas que ens ocupa, és a dir, desplaçaments molt petits, podem considerar que el vector \mathbf{t} segueix, aproximadament, l'eix de la barra en l'estat no deformat, és a dir, l'eix X i, com que $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, podem escriure

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \approx \frac{d^2\mathbf{r}}{dx^2} \quad (6.8)$$

Per tant, podem escriure, tenint en compte 6.7, i prenent $\mathbf{t} \approx \mathbf{i}$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \approx \frac{d\mathbf{t}}{dx} \approx \left(\frac{M_y}{EI_y} \mathbf{j} + \frac{M_z}{EI_z} \mathbf{k} \right) \times \mathbf{i} = \frac{M_z}{EI_z} \mathbf{j} - \frac{M_y}{EI_y} \mathbf{k} \quad (6.9)$$

La curvatura $1/\rho$ és el mòdul del vector de curvatura

$$\frac{1}{\rho} \approx \left| \frac{d\mathbf{t}}{dx} \right| = \sqrt{\left(\frac{M_z}{EI_z} \right)^2 + \left(\frac{M_y}{EI_y} \right)^2} \approx \frac{M_z}{EI_z} + \frac{M_y}{EI_y} \quad (6.10)$$

6.3. Equacions d'equilibri en la flexió

Considerem ara les equacions d'equilibri 3.1 i 3.2

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{k} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{F} + \mathbf{m} &= 0 \end{aligned}$$



que escriurem en termes del vector unitari \mathbf{t} tangent a la línia de centroides de la barra deformada

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{k} = 0 \quad (6.11)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0 \quad (6.12)$$

Derivant 6.12 respecte a s , que recordem que és la coordenada curvilínia de la línia de centroides en l'estat deformat, i suposant que no tenim moments repartits al llarg de la barra, tindrem

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{F}}{ds} + \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{F} = 0 \quad (6.13)$$

Habitualment, el tercer terme de 6.13 és molt petit i es negligeix; això no és cert en el cas que la component normal de \mathbf{F} , és a dir, l'esforç normal, sigui gran. Aquesta darrera situació es dona, per exemple, en el cas d'una barra sotmesa a una compressió forta, cosa que provoca el que s'anomena *vinclament*, i en una barra sotmesa a forces transversals i subjecta pels dos extrems. Analitzarem aquestes situacions més avall.

Si considerem que el tercer terme de 6.13 és negligible, substituint 6.11 a 6.13 s'obté

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \mathbf{t} \times \mathbf{k} \quad (6.14)$$

tenint en compte 6.8 i 6.9, podem escriure

$$M_z = EI_z y'', \quad M_y = -EI_y z'' \quad (6.15)$$

on designem per $'$ les derivades respecte a x . Substituint a 6.14 i confontent \mathbf{t} amb l'eix X ,

$$EI_z y^{(IV)} - k_y = 0, \quad EI_y z^{(IV)} - k_z = 0 \quad (6.16)$$

les equacions 6.16 determinen, amb les aproximacions esmentades, la forma geomètrica de la barra; són les anomenades *equacions de la deformada*.

A més, també podem obtenir unes expressions per a l'esforç en funció de les derivades de x i y ; substituint 6.15 a 6.12, obtenim

$$EI_z y''' + Q_y = 0, \quad EI_y z''' + Q_z = 0 \quad (6.17)$$

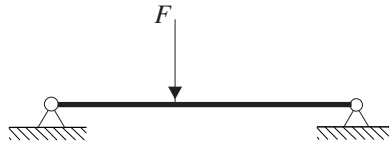
Analitzem ara, tal com hem dit, la situació en la qual el terme $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n}$ de 6.13 no es pot considerar negligible, pel fet que la component normal de l'esforç és molt més gran que les altres components. Desenvolupant $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n}$ i considerant solament la component x , tindrem per l'equació d'equilibri 6.13

$$EI_y z^{(IV)} - k_z - Nz'' = 0, \quad EI_z y^{(IV)} - k_y - Ny'' = 0 \quad (6.18)$$

que són les equacions de partida per a l'estudi del vinclament al capítol 11.

L'altre exemple, important sobretot en construcció, en que no es pot negligir el terme $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{F}$, és el d'una barra de longitud l sotmesa a forces transversals i subjecta pels dos extrems, de manera que el seu desplaçament longitudinal està impedit (fig. 6.9). En aquest cas, encara que no hi hagi càrregues externes aplicades en direcció de la barra, aquesta s'allarga i, per tant, apareix un esforç normal, que designarem per T , que pot ser important.

Fig. 6.9
Exemple d'aparició
d'esforços normals
grans.



La longitud de la barra, un cop deformada, la podem escriure com

$$l + \Delta l = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

Si la flexió és dèbil, podem desenvolupar l'arrel en sèrie de potències, i escriure

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l (y'^2 + z'^2) dx$$

Utilitzant la fórmula bàsica de la tracció pura, obtenim, per a l'esforç normal T ,

$$T = \frac{AE}{2l} \int_0^l (y'^2 + z'^2) dx \quad (6.19)$$

Fem una anàlisi dimensional per veure en quines condicions la força T és important. Si anomenem δ l'ordre de magnitud de la fletxa màxima de la barra, les derivades x' i y' tindran per ordre de magnitud, $\frac{\delta}{l}$; així, la integral de 6.19 tindrà per ordre de magnitud, $\frac{\delta^2}{l}$. El primer i el tercer terme de 6.18 (dreta) tenen per ordre de magnitud, $IE \frac{\delta}{l^4}$ i $ES \frac{\delta^3}{l^4}$, respectivament. Així, tenint en compte que I té per ordre de magnitud, h^4 i S h^2 , on h és el gruix de la barra, arribem a la conclusió que el primer i el tercer termes de 6.18 són comparables quan

$$\delta \sim h$$

6.4. Flexió de barres corbes

Sigui la barra corbada en l'estat no deformat de la figura 6.10. Pel mateix raonament que s'ha fet al començament del capítol, en aplicar dos moments flectors iguals en cada extrem, les seccions transversals es mantindran planes i perpendiculars a la línia de



centroides; per tant, no apareixeran tensions de cisallament. La diferència respecte a la situació en la qual la barra és recta inicialment és que ara la línia de centroides varia la longitud en produir-se la deformació. Suposem que els moments flectors tenen la direcció d'un dels dos eixos principals d'inèrcia Z_G, Y_G de les seccions transversals en el centroide G ; suposem que tenen la direcció de Z_G . Prenem l'origen de coordenades O en el punt de Y_G pertanyent a una fibra que no varia la longitud; aquesta fibra l'anomenem *eix neutre* i, com a eix Y , prenem el mateix Y_G , com a Z el que passa per O i és paral·lel a Z_G , i com a eix X el perpendicular a Y i a Z . La distància entre O i G s'anomena *excentricitat* i la representarem per e .

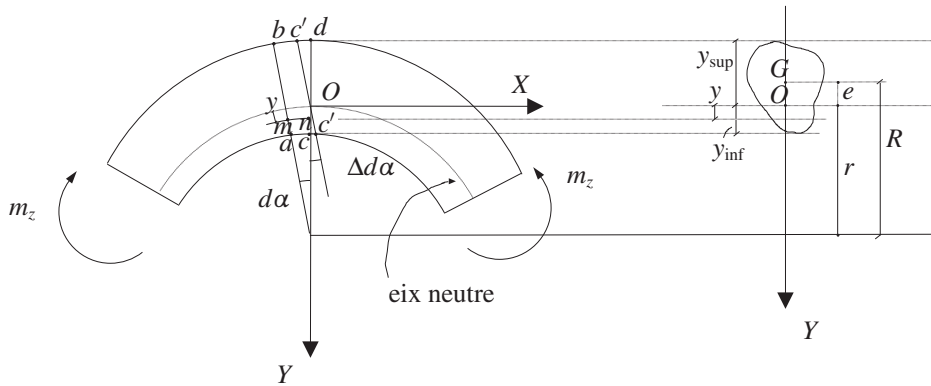


Fig. 6.10
Barra corba en l'estat no deformat.

Prenem dues seccions transversals molt properes, i sobre aquestes seccions dues línies a, b i c, d de la intersecció de la secció transversal amb el pla X, Y . En produir-se la deformació, el punt c es desplaça al punt c' i el punt d ho fa al d' . Si prenem una fibra qualsevol mn a distància y de l'origen en l'estat no deformat, la seva longitud és $(r - y)d\alpha$. En produir-se la deformació, passarà a mesurar $(r - y)d\alpha + y\Delta d\alpha$; així, la deformació normal que haurà tingut lloc en aquest punt val

$$u_{xx} = \frac{y\Delta d\alpha}{(r - y)d\alpha}$$

i les tensions normals,

$$\sigma_{xx} = E u_{xx} = \frac{E y \Delta d\alpha}{(r - y)d\alpha}$$

Aplicant l'equivalència entre la distribució de tensions i el moment flector, obtenim

$$\int_A \sigma_{xx} dA = 0$$

$$\frac{E \Delta d\alpha}{d\alpha} \int_A \frac{y}{(r - y)} dA = 0$$

i, per tant,

$$\int_A \frac{y}{(r - y)} dA = 0 \quad (6.20)$$



D'altra banda,

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_{xx} y dA &= M_z \\ \frac{E \Delta d\alpha}{d\alpha} \int_A \frac{y^2}{(r-y)} dA &= M_z \end{aligned} \quad (6.21)$$

la integral de 6.21 es pot posar en la forma

$$\int_A \frac{y^2}{(r-y)} dA = \int_A \left(-y + \frac{ry}{r-y} \right) dA = - \int_A y dA + r \int_A \frac{y}{r-y} dA \quad (6.22)$$

la darrera integral de 6.22 és nul·la per 6.20 i $\int_A y dA = -eA$; per tant,

$$\frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} = \frac{M_z}{eEA}$$

així, la deformació normal i la tensió valdran

$$u_{xx} = \frac{M_z y}{eEA(r-y)}, \quad \sigma_{xx} = \frac{M_z y}{eA(r-y)}$$

les tensions màximes es produiran en els extrems i valdran

$$\sigma_{xx}(y_{sup}) = \frac{M_z y_{sup}}{eA(r-y_{sup})}, \quad \sigma_{xx}(y_{inf}) = \frac{M_z y_{inf}}{eA(r-y_{inf})}$$

Observem que, si les dimensions transversals de la barra són petites amb relació al radi de curvatura de l'eix neutre r , llavors $(r-y) \approx r$. Per 6.21, tindrem

$$\frac{E \Delta d\alpha}{r d\alpha} I_z = M_z \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} = \frac{M_z}{EI_z}$$

i així

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \frac{E y}{r} \\ \sigma_{xx} &= \frac{M_z}{I_z} y \end{aligned}$$

expressió que coincideix amb l'obtinguda en el cas de barra recta inicialment, la qual cosa demostra que, *per a barres amb dimensions transversals petites en relació amb el radi de curvatura, podem continuar utilitzant les expressions obtingudes per a barres rectes.*

Calculem ara l'excentricitat e , de 6.20

$$\int_A \frac{y}{(r-y)} dA = 0$$



Anomenant y_1 l'ordenada del punt genèric de la secció respecte del centroide, tindrem $y_1 = y + e$; amb aquest canvi de variables, l'equació anterior s'escriurà (fig. 6.10)

$$\int_A \frac{y_1 - e}{(R - y_1)} dA = 0$$

$$\int_A \frac{y_1}{(R - y_1)} dA - e \int_A \frac{1}{R - y_1} dA = 0$$

d'on

$$e = \frac{\int_A \frac{y_1}{(R - y_1)} dA}{\int_A \frac{1}{R - y_1} dA} = 0$$

6.5. Problemes. Flexió recta

Disseminem per X, Y, Z els eixos locals en les seccions transversals. Quan sigui necessari, definirem un eixos globals i els designarem per $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Els eixos globals ens serviran per identificar la secció transversal al llarg de la barra i els eixos locals, per identificar els diferents punts de la secció transversal.

Problema 6.1

Trobeu les tensions normals en els punts A, B i C de la barra de la figura 6.11. Preneu $P = 20 \text{ kN}$

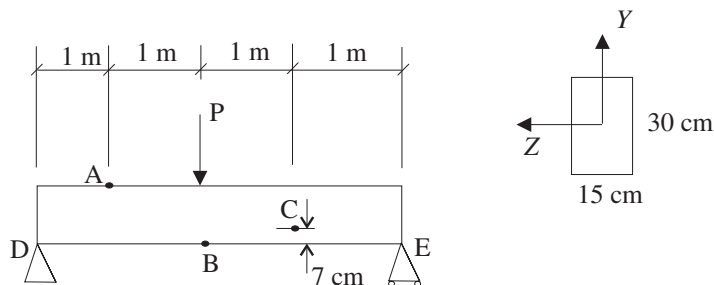


Fig. 6.11

Solució:

Per simetria, les reaccions seran 10 kN cadascuna i cap amunt. Els esforços a la secció que passa per A són (fig. 6.12)

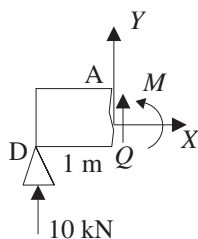


Fig. 6.12



$$Q = -10 \text{ kN}$$

$$M = 10 \text{ kNm}$$

El moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix Z és

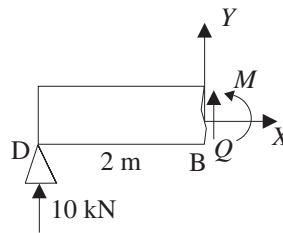
$$I_z = 1/12 \cdot 0,15 \cdot 0,3^3 \text{ m}^4 = 3,375 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Per tant, la tensió normal en el punt A serà

$$\sigma = \frac{-M}{I_z} y = \frac{-10 \text{ kNm}}{3,375 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4} 0,15 \text{ m} = -4,4 \text{ MPa}$$

A la secció que passa per B (fig. 6.13), tenim

Fig. 6.13



$$Q = -10 \text{ kN}$$

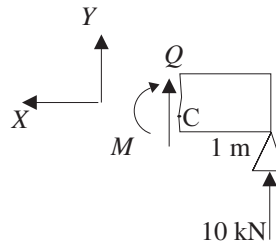
$$M = 20 \text{ kNm}$$

Per tant, la tensió normal al punt B serà

$$\sigma = \frac{-M}{I_z} y = \frac{-20 \text{ kNm}}{3,375 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4} (-0,15 \text{ m}) = 8,8 \text{ MPa}$$

A la secció que passa per C (fig. 6.14), tenim

Fig. 6.14



$$Q = -10 \text{ kN}$$

$$M = 10 \text{ kNm}$$

Per tant, la tensió normal al punt C serà

$$\sigma = \frac{-M}{I_z} y = \frac{-10 \text{ kNm}}{3,375 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4} (-0,08 \text{ m}) = 2,3 \text{ MPa}$$



Problema 6.2

La biga de la figura 6.15 està sotmesa al moment flector de 2,5 kNm representat. Determineu les tensions màximes de tracció i compressió a la biga.

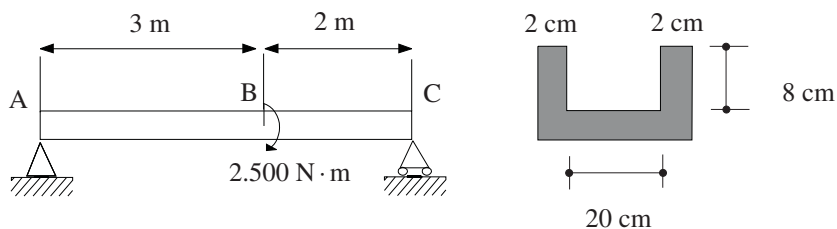


Fig. 6.15

Solució:

Aplicant les equacions d'equilibri a tota la biga n'obtenim les reaccions externes, que són $R_{Ay} = R_{Cy} = 500$ (fig. 6.16).

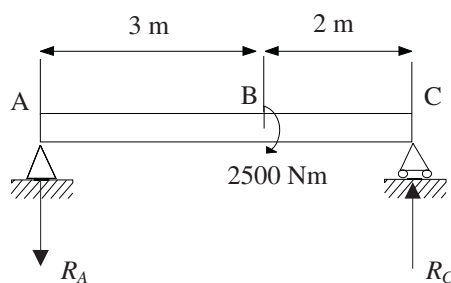


Fig. 6.16

Una vegada trobades les reaccions externes, analitzem els esforços interns dins les dues regions possibles: la que va de A a B (regió I) i la que va de B a C (regió II).

Regió I

Fent un tall i aplicant l'estàtica al tros de l'esquerra n'obtenim (fig. 6.17)

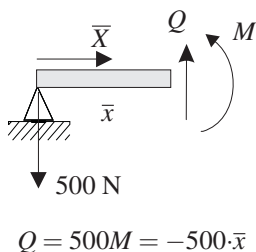


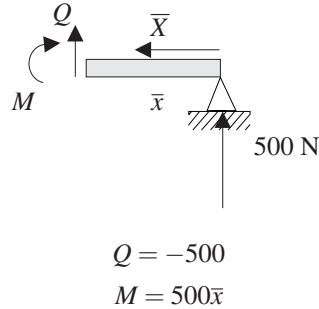
Fig. 6.17

Regió II

Fent un tall i aplicant l'estàtica al tros de la dreta n'obtenim (fig. 6.18)

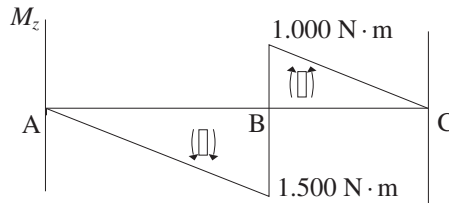


Fig. 6.18



Ja podem representar gràficament els moments flectors (fig. 6.19). Com s'observa a la figura, la secció més perillosa, on els moments flectors són més grans, està situada al voltant del punt B: a la secció situada immediatament a l'esquerra del punt B, el moment és de 1.500 Nm en valor absolut i, a la dreta, el moment és de 1.000 Nm, però amb sentit contrari. Com que el perfil no és simètric, haurem de mirar les dues seccions per esbrinar on es produeixen les tensions màximes.

Fig. 6.19

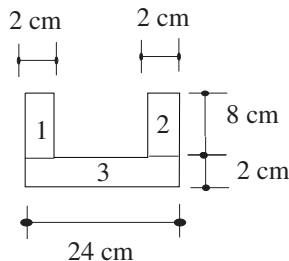


La tensió normal deguda al moment flector M_z ve donada per l'equació

$$\sigma = \frac{-M}{I_z} \cdot y$$

en què Z és l'eix paral·lel a la base i que passa pel centroide. Així doncs, primerament hem de localitzar el centroide. L'alçada \bar{y} del centroide respecte de la base és (fig. 6.20)

Fig. 6.20



$$\bar{y} = \frac{6 \cdot 16 + 6 \cdot 16 + 1 \cdot 48}{16 + 16 + 48} = 3$$

La localització de l'eix Z és, doncs, la indicada a la figura 6.21

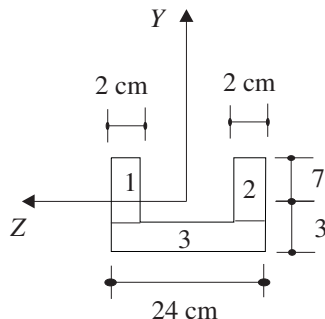


Fig. 6.21

i el moment d'inèrcia respecte l'eix Z és

$$I_z = 2 \int_{-1}^7 y^2 2 dy + \int_{-3}^{-1} y^2 24 dy = 667 \text{ cm}^4$$

A la secció situada immediatament a l'esquerra del punt B, que anomenem B^- (fig. 6.22), el moment flector és negatiu perquè va en sentit contrari a l'eix Z i les tensions màximes valen

$$\sigma'_{B^-} = \frac{-M}{I_z} \cdot y = \frac{-(-150.000 \text{ N}\cdot\text{cm})}{667 \text{ cm}^4} (7 \text{ cm}) = 1.574,2 \text{ N/cm}^2 = 15,7 \text{ MPa}$$

a la fibra superior, i

$$\sigma^c_{B^-} = \frac{-M}{I_z} \cdot y = \frac{-(-150.000 \text{ N}\cdot\text{cm})}{667 \text{ cm}^4} (-3 \text{ cm}) = -674,6 \text{ N/cm}^2 = -6,74 \text{ MPa}$$

a la fibra inferior.

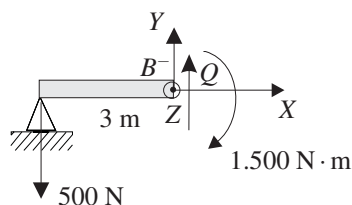


Fig. 6.22

A la secció situada immediatament a la dreta del punt B, que anomenem B^+ (fig. 6.23), el moment flector és positiu perquè va en el mateix sentit que l'eix Z i les tensions màximes valen

$$\sigma'_{B^+} = \frac{-M}{I_z} \cdot y = \frac{-(100.000 \text{ N}\cdot\text{cm})}{667 \text{ cm}^4} (-3 \text{ cm}) = 449,8 \text{ N/cm}^2 = 4,49 \text{ MPa}$$

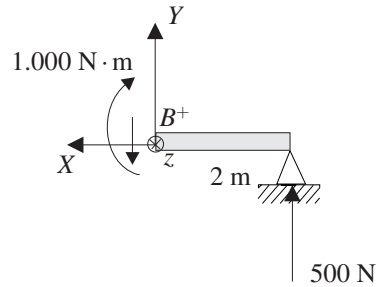
a la fibra inferior, i

$$\sigma^c_{B^+} = \frac{-M}{I_z} \cdot y = \frac{-(100.000 \text{ N}\cdot\text{cm})}{667 \text{ cm}^4} (7 \text{ cm}) = -1.049,5 \text{ N/cm}^2 = -10,49 \text{ MPa}$$

a la fibra superior.



Fig. 6.23



Per tant, les tensions màximes a tracció i compressió que experimenta la biga són

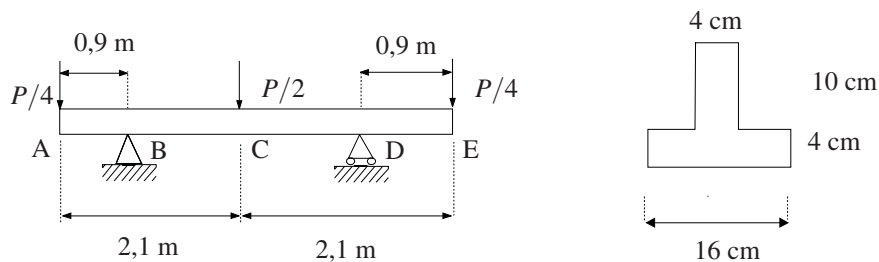
$$\sigma_{max}^t = 1.574,2 \text{ N/cm}^2 = 15,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max}^c = -1.049,5 \text{ N/cm}^2 = -10,49 \text{ MPa}$$

Problema 6.3

Considerem la biga amb extrems en voladiu, carregada amb tres forces puntuals, com es mostra a la figura 6.24. Les tensions normals admissibles són, en tracció, de 35 MPa i, en compressió de 140 MPa. Determineu el màxim valor admissible de P .

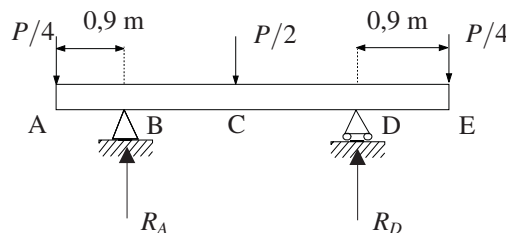
Fig. 6.24



Solució:

Per simetria, les reaccions externes són $R_B = R_D = P/2$ (fig. 6.25). Per igualar les tensions màximes a les permeses pel material, hem de conèixer quina o quines són les seccions més perilloses, que seran aquelles en què el moment flector sigui màxim. Com que no sabem quines són a simple vista, fem la gràfica de moments flexors. Per això, dividim la barra en regions (fig. 6.25).

Fig. 6.25





Regió I. És representada a la figura 6.26 i el domini és $0 < \bar{x} < 0,9$. Aplicant l'estàtica

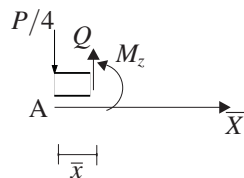


Fig. 6.26

$$Q = P/4 \quad M_z = -\frac{P}{4}\bar{x}$$

Donant valors a \bar{x} ,

$$A : M_z(0) = 0 \quad B : M_z(0,9) = -\frac{0,9P}{4}$$

Regió II. És representada a la figura 6.27 i el domini és $0 < \bar{x} < 1,2$. Aplicant l'estàtica

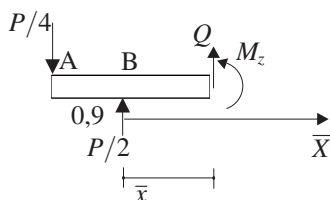


Fig. 6.27

$$Q + \frac{P}{2} = \frac{P}{4} \Rightarrow Q = -\frac{P}{4}$$

$$M_z + \frac{P}{4}(0,9 + \bar{x}) = \frac{P}{2}\bar{x} \Rightarrow M_z = -\frac{0,9P}{4} + \frac{P}{4}\bar{x}$$

Donant valors a \bar{x} ,

$$B : M_z(0) = -\frac{0,9P}{4} \text{ Nm} \quad C : M_z(1,2) = \frac{0,3P}{4} \text{ Nm}$$

Per simetria, no cal que fem la part dreta de l'estructura i així la gràfica de moments serà la representada a la figura 6.28

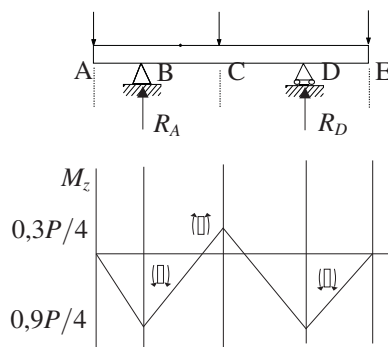


Fig. 6.28



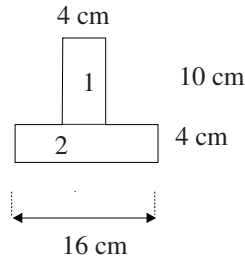
Com que el perfil no és simètric, hem d'estudiar les traccions i compressions als punts B i C (el D serà el mateix que el B), encara que el moment sigui més petit a C que a B.

La tensió normal deguda al moment flector M_z ve donada per l'equació

$$\sigma = \frac{-M}{I_z} \cdot y$$

en què Z és l'eix paral·lel a la base i que passa pel centroide. Així doncs, primerament hem de localitzar el centroide. L'alçada \bar{y} del centroide respecte de la base és (fig. 6.29)

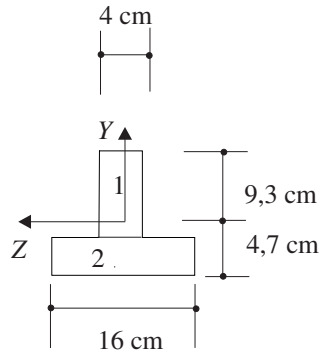
Fig. 6.29



$$\bar{y} = \frac{9 \cdot 40 + 2 \cdot 64}{40 + 64} = 4,7$$

La localització de l'eix Z és, doncs, la indicada a la figura 6.30

Fig. 6.30



i el moment d'inèrcia respecte de l'eix Z és

$$I_z = \int_{-0,7}^{9,3} y^2 4 dy + \int_{-4,7}^{-0,7} y^2 16 dy = 1.617 \text{ cm}^4$$

A la secció B, el moment flector és negatiu perquè va en sentit contrari a l'eix Z, la tracció es produeix a la fibra superior del perfil i la compressió, a la inferior (fig. 6.31). Igualant als màxims permesos per al material, obtenim

$$\sigma_B^{sup} = -\frac{M_z}{I_z} y = -\frac{-90P/4 \text{ Ncm}}{1.617 \text{ cm}^4} 9,3 \text{ cm} = 3.500 \text{ N/cm}^2 \Rightarrow P = 26,9 \text{ kN}$$



$$\sigma_B^{inf} = -\frac{M_z}{I_z}y = -\frac{-90P/4 \text{ Ncm}}{1.617 \text{ cm}^4}(-4,7 \text{ cm}) = -14.000 \text{ N/cm}^2 \Rightarrow P = 214 \text{ kN}$$

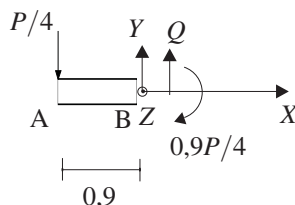


Fig. 6.31

A la secció C, el moment flector és positiu perquè va en el mateix sentit que l'eix Z, la tracció es produeix a la fibra inferior del perfil i la compressió, a la superior (fig. 6.32). Igualant als màxims permesos per al material, obtenim

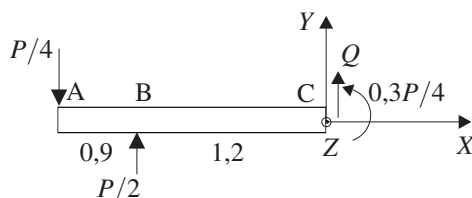


Fig. 6.32

$$\sigma_C^{inf} = -\frac{M_z}{I_z}y = -\frac{30P/4 \text{ Ncm}}{1.617 \text{ cm}^4}(-4,7 \text{ cm}) = 3.500 \text{ N/cm}^2 \Rightarrow P = 160,55 \text{ kN}$$

$$\sigma_C^{sup} = -\frac{M_z}{I_z}y = -\frac{30P/4 \text{ Ncm}}{1.617 \text{ cm}^4}9,3 \text{ cm} = -14.000 \text{ N/cm}^2 \Rightarrow P = 32,56 \text{ kN}$$

Així doncs, el màxim valor de P que podem aplicar és el més petit de tots ells $P = 26,9 \text{ kN}$

Problema 6.4

La biga en voladiu de la figura 6.33 té una longitud de 5 m i està sotmesa a una càrrega puntual de 1.500 N al seu extrem lliure. Trobeu les tensions màximes de tracció i compressió. $I_z = 2.630 \text{ cm}^4$.

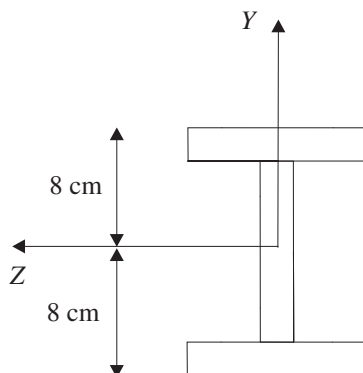


Fig. 6.33



Solució:

El moment màxim té lloc a l'encastament i val

$$M_{max} = 1.500 \cdot 500 \text{ Ncm} = 750.000 \text{ Ncm}$$

així, la tensió màxima de tracció es produeix a la fibra superior d'aquesta secció i val

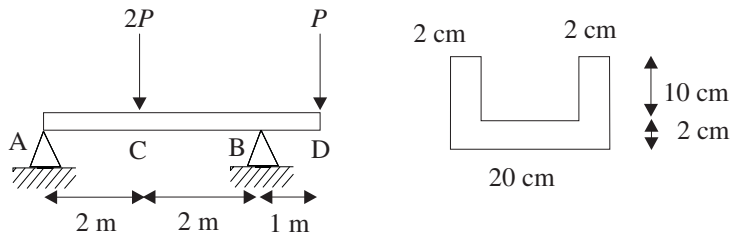
$$\sigma_{trac} = \frac{750.000 \text{ Ncm}}{2.630 \text{ cm}^4} \cdot 8 \text{ cm} = 2.281 \text{ N/cm}^2$$

la compressió màxima es produeix a la fibra inferior de la mateixa secció i té el mateix valor absolut.

Problema 6.5

Donada la biga en U de la figura 6.34, determineu la càrrega màxima P admissible, sabent que la tensió màxima en tracció és de 35 MPa i en compressió, de 140 MPa.

Fig. 6.34



Solució:

Per obtenir la màxima càrrega que podem aplicar tenint en compte que les tensions normals no superin els valors fixats, hem de localitzar la secció o les seccions més perilloses per moments flectors i, dins d'elles els punts on les tensions normals σ són més grans. Igualant aquestes tensions als màxims permesos pel material, obtindrem diversos valors de P i hauré de triar el més petit de tots ells com a càrrega màxima possible.

Necessitem, doncs, primerament la gràfica de moments flectors. Aplicant l'estàtica a la barra, obtenim les reaccions externes

$$3P = R_A + R_B$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 2P \cdot 2 + P \cdot 5 = R_B \cdot 4$$

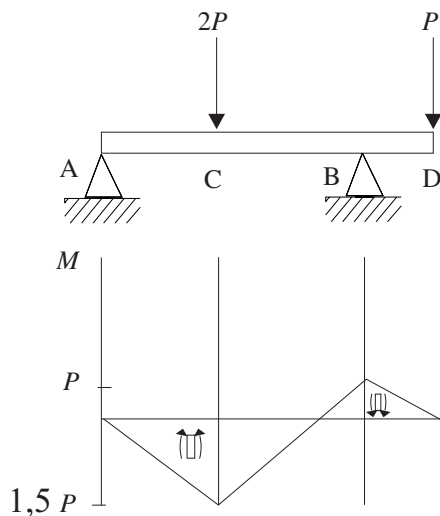
d'on

$$R_B = 2,25P \quad R_A = 0,75P$$

Així, la gràfica de moments flectors serà la indicada a la figura 6.35



Fig. 6.35



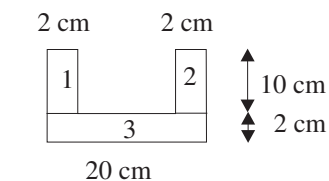
Observem que les seccions més perilloses són la C i la B i que en elles els moments flectors tenen sentit contrari. Per tant, com que el perfil no és simètric, hem de estudiar les tensions normals en les dues seccions, ja que podria passar que, amb un moment més petit però canviat de sentit, apareguessin tensions més grans.

La tensió normal deguda al moment flector M_z ve donada per l'equació

$$\sigma = \frac{-M}{I_z} \cdot y$$

en què Z és l'eix paral·lel a la base i que passa pel centroid. Així doncs, primerament hem de localitzar el centroid. L'alçada \bar{y} del centroid respecte de la base és (fig. 6.36)

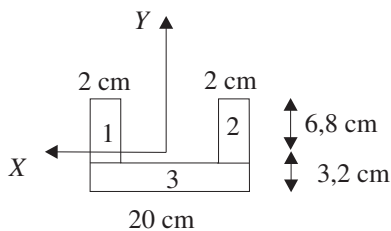
Fig. 6.36



$$\bar{y} = \frac{7 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 1 \cdot 40}{20 + 20 + 40} = 3,2$$

La localització de l'eix Z és, doncs, la indicada a la figura 6.37

Fig. 6.37





i el moment d'inèrcia respecte de l'eix Z és

$$I_z = 2 \int_{-1,2}^{6,8} y^2 2dy + \int_{-3,2}^{-1,2} y^2 20dy = 625,6 \text{ cm}^4$$

A la secció C, el moment flector és positiu perquè va en el mateix sentit que l'eix Z, la tracció es produeix a la fibra inferior i la compressió, a la superior (fig. 6.38).

$$3.500 \text{ N/cm}^2 = \frac{-150P \text{ Ncm}}{625,6 \text{ cm}^4} (-3,2 \text{ cm})$$

d'on

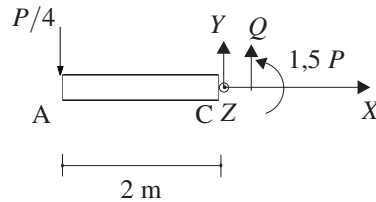
$$P = 4.600 \text{ N}$$

$$-14.000 \text{ N/cm}^2 = \frac{-150P \text{ Ncm}}{625,6 \text{ cm}^4} 6,8 \text{ cm}$$

d'on

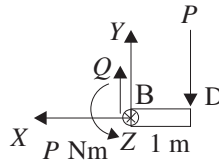
$$P = 8.750 \text{ N}$$

Fig. 6.38



A la secció B, el moment flector és negatiu perquè va en sentit contrari a l'eix Z, la tracció es produeix a la fibra superior i la compressió, a la inferior (fig. 6.39).

Fig. 6.39



$$3.500 \text{ N/cm}^2 = \frac{100P \text{ Ncm}}{625,6 \text{ cm}^4} 6,8 \text{ cm}$$

d'on

$$P = 3.220 \text{ N}$$

i

$$-14.000 \text{ N/cm}^2 = \frac{100P \text{ Ncm}}{625,6 \text{ cm}^4} (-3,2 \text{ cm})$$



d'on

$$P = 27.450 \text{ N}$$

La major càrrega P que podem aplicar a l'estructura és la més petita de les que hem obtingut $P = 3.220 \text{ N}$

6.6. Problemes. Flexió desviada

Disseminem per X, Y, Z els eixos locals a les seccions transversals. Quan sigui necessari, definirem uns eixos globals i els designarem per $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Els eixos globals ens serviran per identificar la secció transversal al llarg de la barra i els eixos locals, per identificar els diferents punts de la secció transversal.

Problema 6.6

La biga de la figura 6.40 està sol·licitada per les forces P i $2P$. Determineu-ne les tensions màximes.

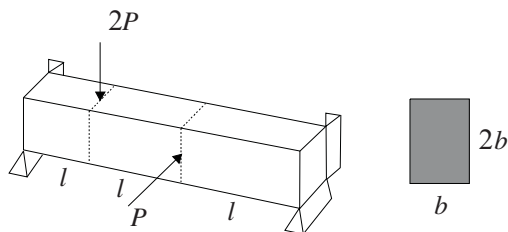


Fig. 6.40

Solució:

Les reaccions les tenim representades a la figura 6.41,

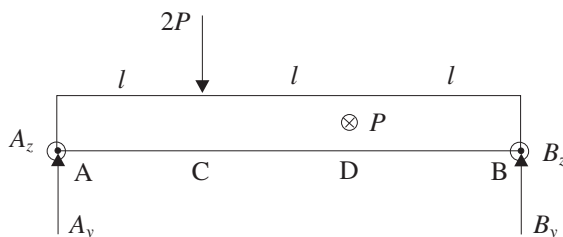


Fig. 6.41

Aplicant les equacions d'equilibri a la barra,

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2P = A_y + B_y$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow P = A_z + B_z$$



$$\sum M_z^A = 0 \rightarrow 2Pl = B_y 3l$$

$$\sum M_y^A = 0 \rightarrow P2l = B_z 3l$$

d'on

$$A_y = 4P/3 \quad B_y = 2P/3$$

$$A_z = P/3 \quad B_z = 2P/3$$

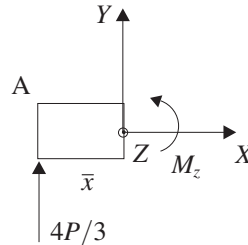
Per determinar les tensions màximes, necessitem esbrinar primerament les seccions on els moments flectors M_z i M_y són màxims. Si tant M_z com M_y són màxims a la mateixa secció, aleshores aquí on es produiran les tensions màximes. Però podria ser que M_z fos màxim en una secció i M_y en una altra de diferent, llavors hauríem d'estudiar les dues seccions. El procediment serà, doncs, obtenir en primer lloc, les gràfiques de M_z i de M_y .

Per a M_z , hi han dues regions: la que va de A a C i la que va de C a B (fixem-nos que la força P no afecta M_z). Fent un tall dins la regió AC (fig. 6.42) (a la secció només hi ha dibuixat M_z), n'obtenim

$$M_z = 4P\bar{x}/3$$

on $0 < \bar{x} < l$

Fig. 6.42



i, donant valors a \bar{x} ,

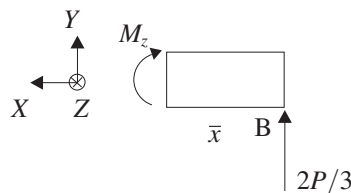
$$A : M_z(0) = 0 \quad C : M_z(l) = 4Pl/3$$

Fent un tall dins la regió CB (fig. 6.43) (a la secció només hi ha dibuixat M_z), n'obtenim

$$M_z = 2P\bar{x}/3$$

on $0 < \bar{x} < 2l$

Fig. 6.43



i, donant valors a x ,

$$B : M_z(0) = 0 \quad D : M_z(l) = 2Pl/3 \quad C : M_z(2l) = 4Pl/3$$

la gràfica de M_z és la indicada a la figura 6.45.

Per a M_y hi ha dues regions: la que va de A a D i la que va de D a B (fixem-nos que la força $2P$ no afecta M_y). Fent un tall dins la regió AD (fig. 6.44) (a la secció només hi ha dibuixat M_y), n'obtenim

$$P/3 \cdot \bar{x} + M_y = 0 \rightarrow M_y = -P\bar{x}/3$$

on $0 < \bar{x} < 2l$

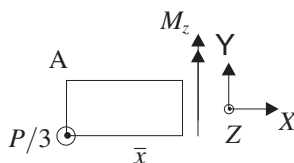


Fig. 6.44

i, donant valors a \bar{x} ,

$$A : M_y(0) = 0 \quad C : M_y(l) = -Pl/3 \quad D : M_y(2l) = 2Pl/3$$

Per continuïtat i, atès que a B M_y és zero, la gràfica de M_y és la indicada a la figura 6.45.

Observant les gràfiques, deduïm que les seccions que s'han d'estudiar són la C i la D.

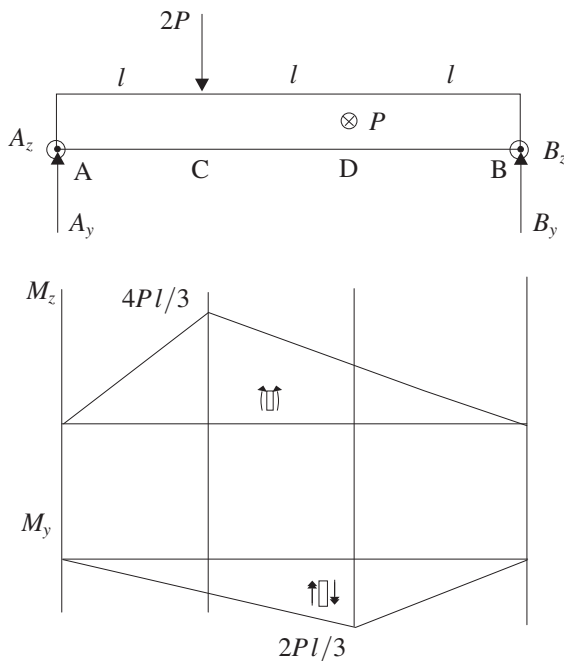
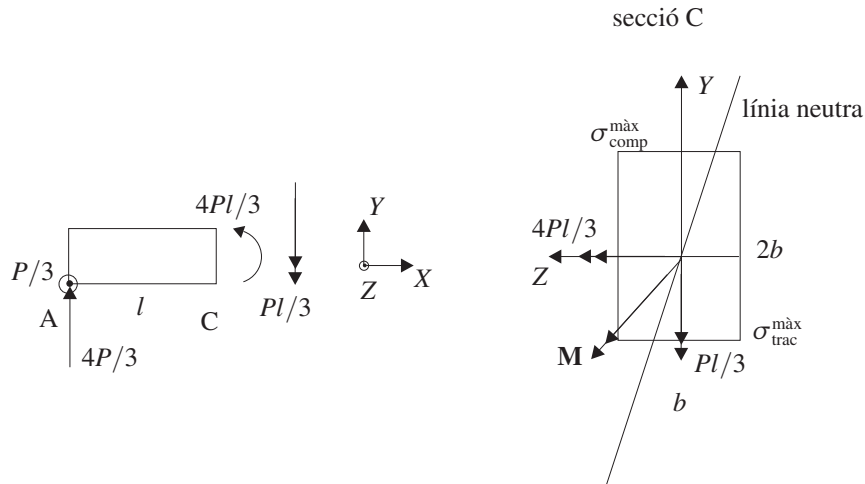


Fig. 6.45

A la secció C, vista des de la dreta, els esforços que hi actuen estan representats a la figura 6.46 (només hi ha dibuixats els moments flectors)

Fig. 6.46



La tensió normal en un punt de coordenades (z, y) de la secció és

$$\sigma = \frac{-M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

així, la tensió màxima de tracció es produeix en el vèrtex inferior a la dreta, tal com s'indica a la figura, i val

$$\sigma_{trac}^{max} = \frac{-4Pl/3}{\frac{1}{12}b(2b)^3}(-b) + \frac{-Pl/3}{\frac{1}{12}2b(b)^3}(-b/2) = 3Pl/b^3$$

i la tensió màxima de compressió es produeix en el vèrtex superior a l'esquerra, tal com s'indica a la figura, i val

$$\sigma_{comp}^{max} = \frac{-4Pl/3}{\frac{1}{12}b(2b)^3}(b) + \frac{-Pl/3}{\frac{1}{12}2b(b)^3}(b/2) = -3Pl/b^3$$

A la secció D, vista des de la dreta, els esforços que hi actuen estan representats a la figura 6.47 (només hi ha dibuixats els moments flectors).

La tensió normal en un punt de coordenades (z, y) de la secció és

$$\sigma = \frac{-M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

així, la tensió màxima de tracció es produeix en el vèrtex inferior a la dreta, tal com s'indica a la figura, i val



$$\sigma_{trac}^{max} = \frac{-2Pl/3}{\frac{1}{12}b(2b)^3}(-b) + \frac{-2Pl/3}{\frac{1}{12}2b(b)^3}(-b/2) = 3Pl/b^3$$

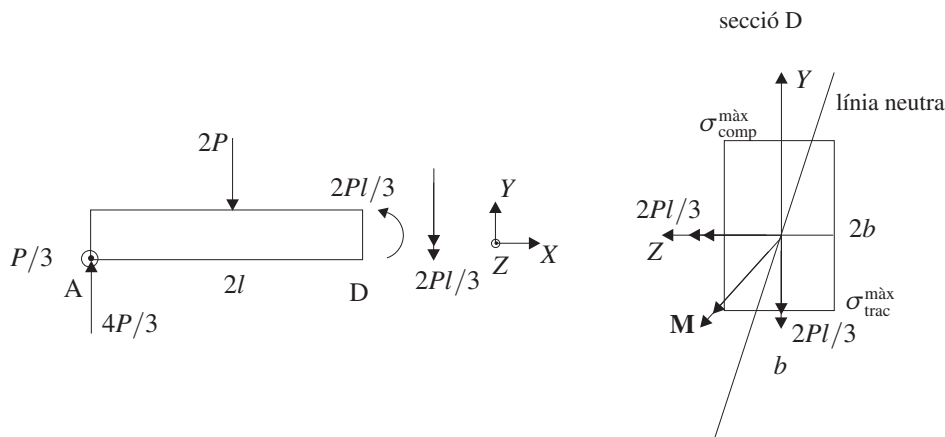


Fig. 6.47

i la tensió màxima de compressió es produeix al vèrtex superior a l'esquerra, tal com s'indica a la figura, i val

$$\sigma_{comp}^{max} = \frac{-2Pl/3}{\frac{1}{12}b(2b)^3}(b) + \frac{-2Pl/3}{\frac{1}{12}2b(b)^3}(b/2) = -3Pl/b^3$$

Com es veu, en aquest cas, els valors de les tensions màximes són els mateixos a les seccions C i D i són els màxims que suporta l'estructura.

Problema 6.7

Determineu les tensions normals als vèrtexs de la secció de l'encastament a la barra de la figura 6.48. Dibuxeu-ne aproximadament, la línia neutra i localitzeu on es produeixen les tensions màximes.

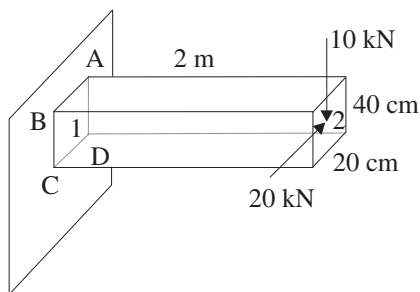


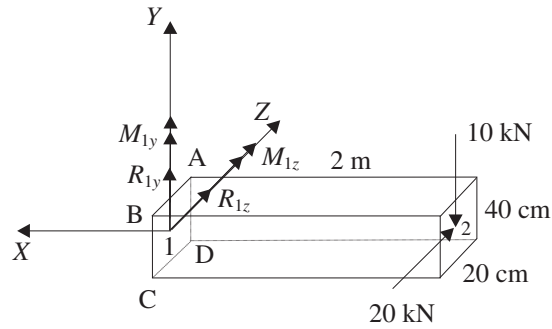
Fig. 6.48

Solució:

Com que ens interessa conèixer les tensions a la secció de l'encastament, fem un tall directament en aquesta secció i, n'aïllem la part de la dreta (fig. 6.49),



Fig. 6.49



Aplicant l'equilibri al tros aïllat, tindrem

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{1y} = 10$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow R_{1z} = -20$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{1y} + 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_{1y} = -40$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_{1z} + 10 \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_{1z} = -20$$

La tensió normal en un punt de coordenades (z, y) de la secció és

$$\sigma = \frac{-M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

Substituint valors, tenim, per als vèrtexs

$$\sigma_A = \frac{-(-20)}{\frac{1}{12}0,2 \cdot 0,4^3}0,2 + \frac{-40}{\frac{1}{12}0,4 \cdot 0,2^3}0,1 = -11.250 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B = \frac{-(-20)}{\frac{1}{12}0,2 \cdot 0,4^3}0,2 + \frac{-40}{\frac{1}{12}0,4 \cdot 0,2^3}(-0,1) = 18.750 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C = \frac{-(-20)}{\frac{1}{12}0,2 \cdot 0,4^3}(-0,2) + \frac{-40}{\frac{1}{12}0,4 \cdot 0,2^3}(-0,1) = 11.250 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D = \frac{-(-20)}{\frac{1}{12}0,2 \cdot 0,4^3}(-0,2) + \frac{-40}{\frac{1}{12}0,4 \cdot 0,2^3}0,1 = -18.750 \text{ kN/m}^2$$

La línia neutra la tenim dibuixada de manera aproximada a la figura 6.50. Atès que la línia neutra ha d'estar en el mateix quadrant que el vector moment resultant, i veient el sentit d'aquest, el punt on apareix tracció màxima és el B i el de compressió màxima, el D.

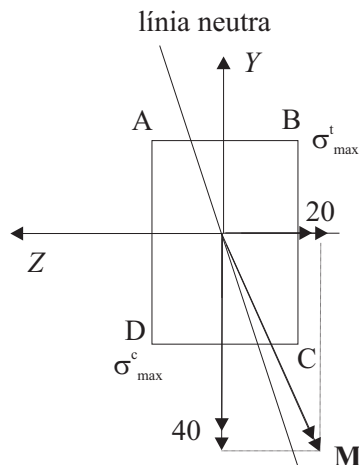


Fig. 6.50

Problema 6.8

Dimensioneu la barra de la figura 6.51 sabent que el perfil és rectangular, amb $h = \frac{4}{3}b$, i la tensió normal màxima que és capaç d'aguantar el material és de 10 MPa. Les dues càrregues estan contingudes en el pla de les seccions transversals.

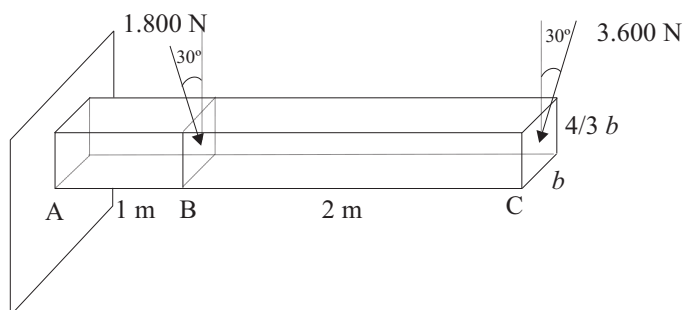


Fig. 6.51

Solució:

Les reaccions estan representades a la figura 6.52

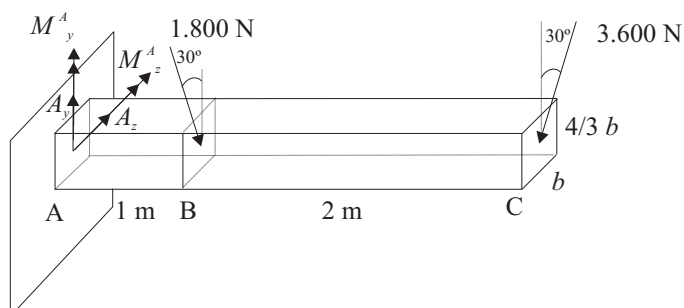


Fig. 6.52

Aplicant-hi les equacions d'equilibri, s'obté

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y = 1,8 \cos 30 + 3,6 \cos 30 = 4,67 \text{ kN}$$

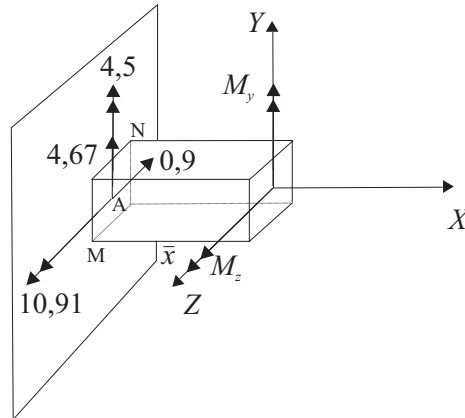
$$\sum F_z = 0 \rightarrow A_z + 1,8 \sin 30 = 3,6 \sin 30 \rightarrow A_z = 0,9 \text{ kN}$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow 1,8 \cos 30 \cdot 1 + 3,6 \cos 30 \cdot 3 + M_z^A = 0 \rightarrow M_z^A = -10,9 \text{ kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow 1,8 \sin 30 \cdot 1 + M_y^A = 3,6 \sin 30 \cdot 3 \rightarrow M_y^A = 4,5 \text{ kNm}$$

Considerem dues regions, la que va de A a B, que anomenem regió I, i la que va de B a C que anomenem regió II. Fent un tall dins la regió I (fig. 6.53) (no es dibuixen ni la força normal ni la de cisallament a la secció on es fa el tall), i prenent moments respecte de la secció on s'ha fet el tall, s'obté per a M_z ,

Fig. 6.53



$$\sum M_z = 0 \rightarrow 4,67 \bar{x} = M_z + 10,91 \rightarrow M_z = -10,91 + 4,67 \bar{x}$$

on $0 < \bar{x} < 1$. Donant valors a \bar{x} ,

$$A : M_z(0) = -10,91 \text{ kNm} \quad B : M_z(1) = -6,24 \text{ kNm}$$

Per a M_y ,

$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_y + 4,5 = 0,9 \bar{x} \rightarrow M_y = 0,9 \bar{x} - 4,5$$

on $0 < \bar{x} < 1$. Donant valors a \bar{x} ,

$$A : M_y(0) = -4,5 \text{ kNm} \quad B : M_y(1) = -3,6 \text{ kNm}$$

Tenint en compte que a B no hi pot haver discontinuïtat en la gràfica de moments flectors, ja que no hi ha moments externs aplicats, i que a C tant M_z com M_y han de ser zero, podem dibuixar la gràfica sense necessitat d'estudiar la regió II. Tenim la gràfica a la figura 6.54,

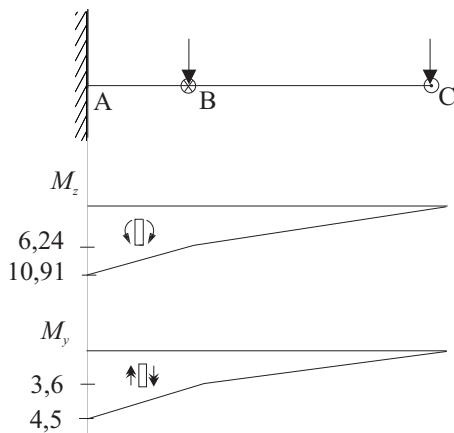


Fig. 6.54

Observant la gràfica, deduïm que és l'encastament on es produiran les tensions normals màximes per flexió. La situació que es té en aquesta secció és la representada a la figura 6.55, que correspon a la secció de la paret (no a la primera secció de la barra).

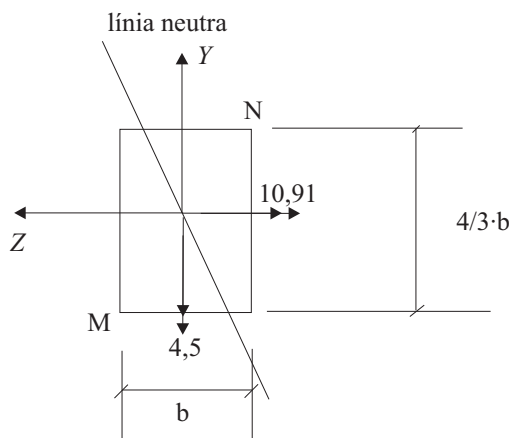


Fig. 6.55

Els moments d'inèrcia respecte dels eixos són

$$I_z = (1/12)b(4b/3)^3 = 0,197b^4$$

$$I_y = (1/12)(4b/3)b^3 = 0,111b^4$$

A N, tindrem la tracció màxima i, a M, la compressió màxima. Els seus valors, que són els que igualarem al màxim permès per al material, són

$$\sigma_M = \frac{10,91}{0,197b^4}(-h/2) + \frac{-4,5}{0,111b^4}(b/2) = \frac{-57,19}{b^3}$$

$$\sigma_N = \frac{10,91}{0,197b^4}(h/2) + \frac{-4,5}{0,111b^4}(-b/2) = \frac{57,19}{b^3}$$



Observem que $|\sigma_M| = |\sigma_M|$; això es compleix sempre en un perfil rectangular, és a dir, en una flexió desviada, i per a un perfil rectangular; la tracció màxima és igual a la compressió màxima, a cada secció. Això degut al fet que la distància del punt M i la del punt N a la línia neutra, que és l'eix de rotació, són iguals en aquest perfil. Igualant σ_M al valor màxim permès per al material,

$$\sigma_M = \frac{57,19 \text{ kNm}}{b^3} = 10^4 \text{ kN/m}^2$$

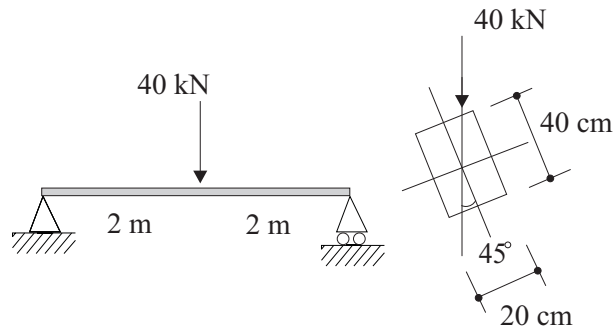
d'on

$$b = 0,178 \text{ m} = 17,8 \text{ cm}$$

Problema 6.9

Determineu les tensions màximes i dibuixeu la línia neutra a la secció on aquestes es produeixen (fig. 6.56).

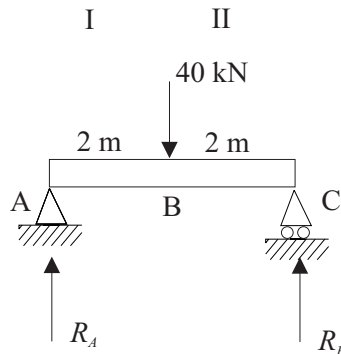
Fig. 6.56



Solució:

Les reaccions les tenim representades a la figura 6.57

Fig. 6.57



Observem que les reaccions són verticals. Així és independent de com estigui orientada la barra; per tant, el vector moment flector en una secció transversal qualsevol serà per-



pendicular al pla que formen la càrrega externa i les reaccions (perpendicular al pla del paper) (fig. 6.58). La direcció del vector moment M no coincideix amb cap eix principal Y o Z , és a dir, té components en direcció Y i en direcció Z ; per tant, es tracta d'una flexió desviada. És clar també que el sentit del vector moment M és cap enfora del paper, tal com s'indica; això ho podem veure més clar fent un tall a la secció B (fig. 6.59).

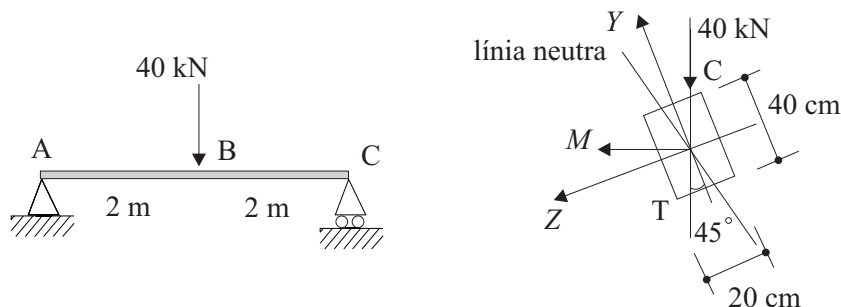


Fig. 6.58

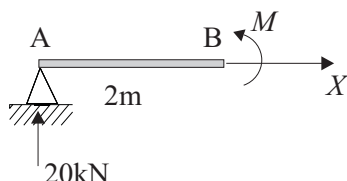


Fig. 6.59

El moment flector màxim es produeix a la secció B i val $M = 40 \text{ kNm}$, i les seves components són $M_z = 40 \cos 45^\circ$ i $M_y = 40 \sin 45^\circ$, les dues positives, tal com es veu a la figura 6.58. Així, la tracció màxima es produeix al punt T d'aquesta secció i la compressió al punt C.

La tensió normal en un punt de coordenades (z, y) de la secció és

$$\sigma = \frac{-M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Substituint valors, tindrem per al punt T

$$\sigma_T = \frac{-28,28}{\frac{1}{12} 0,2 \cdot 0,4^3} (-0,2) + \frac{28,28}{\frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,2^3} (0,1) = 15.907,5 \text{ kN/m}^2$$

i al punt C

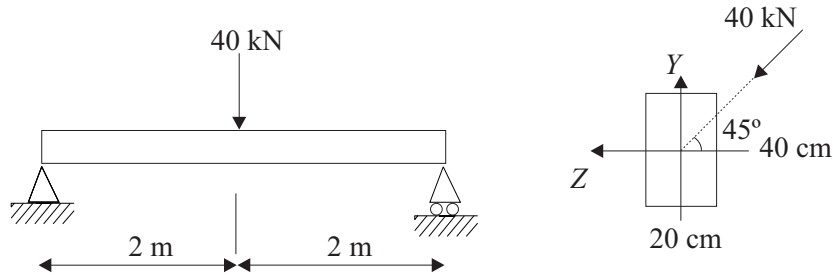
$$\sigma_C = \frac{-28,28}{\frac{1}{12} 0,2 \cdot 0,4^3} (0,2) + \frac{28,28}{\frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,2^3} (-0,1) = -15.907,5 \text{ kN/m}^2$$

Problema 6.10

Determineu les tensions màximes i dibuixeu la línia neutra a la secció on aquestes es produeixen (fig. 6.60).



Fig. 6.60

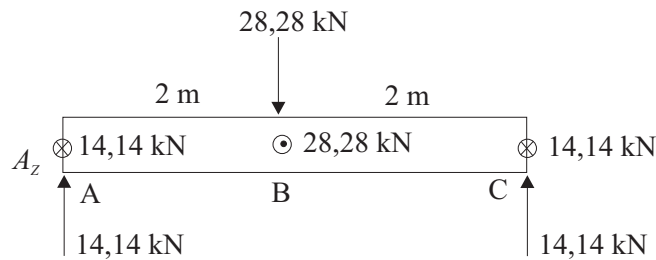


Solució:

Observem que aquest exercici és exactament igual que l'exercici 6.9; allà estava girada la barra i aquí està girada la càrrega externa. No obstant això, i amb finalitat acadèmica, el resolldrem novament considerant la figura actual.

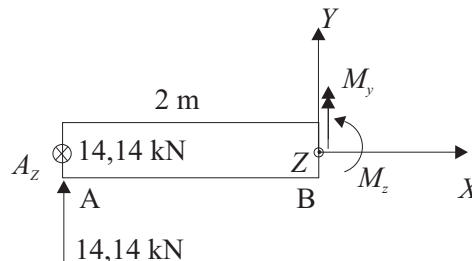
El primer que fem és descomposar-ne la càrrega externa en les seves components vertical i horitzontal; les reaccions estan representades a la figura 6.61

Fig. 6.61



La càrrega vertical i les reaccions verticals corresponents donen lloc a l'aparició d'un moment flector M_z en la direcció de l'eix principal Z, i la càrrega horitzontal i les reaccions horitzontals corresponents donen lloc a l'aparició d'un moment flector M_y en la direcció de l'eix principal y, és a dir, tenim una flexió desviada. És clar que tant M_z com M_y són màxims a la secció B (figura 6.62)

Fig. 6.62



Aplicant-hi les equacions d'equilibri

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = 28,28 \text{ kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = 28,28 \text{ kNm}$$

Així, la secció B, vista des de C, té els esforços que es mostren a la figura 6.63

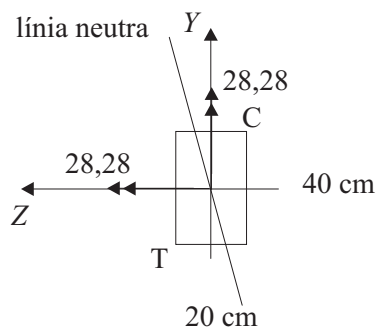


Fig. 6.63

La tensió normal en un punt de coordenades (z, y) de la secció és

$$\sigma = \frac{-M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

Substituint valors tenim, per al punt T

$$\sigma_T = \frac{-28,28}{\frac{1}{12}0,2 \cdot 0,4^3}(-0,2) + \frac{28,28}{\frac{1}{12}0,4 \cdot 0,2^3}(0,1) = 15.907,5 \text{ kN/m}^2$$

i al punt C

$$\sigma_C = \frac{-28,28}{\frac{1}{12}0,2 \cdot 0,4^3}(0,2) + \frac{28,28}{\frac{1}{12}0,4 \cdot 0,2^3}(-0,1) = -15.907,5 \text{ kN/m}^2$$

Aquests valors coincideixen, naturalment, amb els obtinguts a l'exercici 6.9.

→ 7



Tracció i compressió excèntrica

S'anomena *tracció o compressió excèntrica* l'estat de sol·licitació en què a la secció transversal s'aplica tan sols un esforç normal N en un punt $P(y_P, z_P)$ diferent del centroide de la secció (fig. 7.1). Prenem els eixos locals de la manera següent: l'origen de coordenades al centroide G de la secció transversal; l'eix X en la direcció de l'eix de la barra, i Y, Z , sobre la secció transversal i coincidint amb els eixos principals d'inèrcia de la secció.

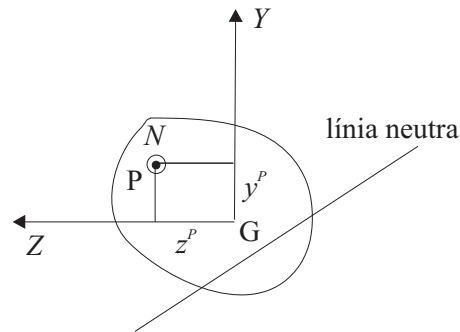


Fig. 7.1
Tracció o compressió
excèntrica.

La força N aplicada al punt P és equivalent a la mateixa força aplicada a G , més el moment resultant de la translació \mathbf{M} , essent

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{N}$$

on $\mathbf{r}_P = (0, y_P, z_P)$ i $\mathbf{N} = (N, 0, 0)$

Efectuant el producte vectorial

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & y_P & z_P \\ N & 0 & 0 \end{bmatrix} = N z_P \mathbf{j} - N y_P \mathbf{k}$$



és a dir, el moment resultant de la translació té components sobre els eixos Y i Z . Podem concloure, doncs, que la força normal N aplicada fora del centroide és equivalent a una tracció-compensió pura més una flexió desviada, amb $M_z = -Ny_P$ i $M_y = Nz_P$. És a dir, la situació que tenim es resumeix així:

$$\begin{aligned} N_y &= N_z = 0 \\ N_x &= N \\ M_y &= Nz_P \\ M_z &= -Ny_P \\ M_x &= 0 \end{aligned}$$

Aplicant-hi el principi de superposició i tenint en compte 5.5 i 6.6, escriurem

$$u_{xx} = \frac{N}{EA} + \frac{Ny_P}{EI_z}y + \frac{Nz_P}{EI_y}z$$

i

$$\sigma_{xx} = Eu_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{Ny_P}{I_z}y + \frac{Nz_P}{I_y}z$$

La línia neutra, la trobem fent $\sigma_{xx} = 0$

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{y_P}{I_z}y + \frac{z_P}{I_y}z \quad (7.1)$$

7.1. Nucli central

De l'equació de la línia neutra, es dedueix que aquesta no passa pel centroide i , a més, no passa pel mateix quadrant on és aplicada la força N (hauria de ser $y > 0$ i $z > 0$, simultàniament; en cas que y_P i z_P també ho fossin, llavors la suma dels tres termes no donaria zero). La línia neutra separa la zona de la secció que treballa a tracció de la que treballa a compressió. Podria ser que la línia neutra fos tangent a la secció o que estigués situada fora d'ella; en aquests casos, tota la secció quedaria a la mateixa banda de la línia neutra i, per tant, apareixerien tensions del mateix signe en tots els punts de la secció. Sigui P un punt on hauríem de col·locar la força normal per tal que la línia neutra corresponent fos tangent a la secció (fig. 7.2); la distància entre el centroide i i la línia neutra és

$$d = \frac{1/A}{\sqrt{\left(\frac{y_P}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{z_P}{I_y}\right)^2}}$$

Si acostem el punt d'aplicació de la força cap al centroide sobre la recta que uneix G amb P , la línia neutra se n'allunya traslladant-se paral·lelament. Això és degut al fet que, segons 7.1, l'orientació del vector director de la línia neutra no canvia i d es fa més gran. Per tant, aplicant la força en qualsevol punt del segment PG , tota la secció treballarà a



tracció (o bé a compressió, si el que s'hi aplica és una compressió). Fent el mateix procés per a totes les orientacions de la línia PG i unint tots els punts P, s'obté el contorn del que s'anomena *nucli central*. Així doncs, *aplicant una força de tracció (compressió) en el contorn o a l'interior del nucli central, tota la secció treballarà a tracció (compressió)*. És necessari conèixer el nucli central quan interessa precisament que tota la secció treballi de la mateixa manera, per exemple, en el cas d'un pilar de formigó sobre el qual hi ha aplicada una càrrega de compressió; no convé que hi apareguin zones de tracció ja que el material la suporta malament.

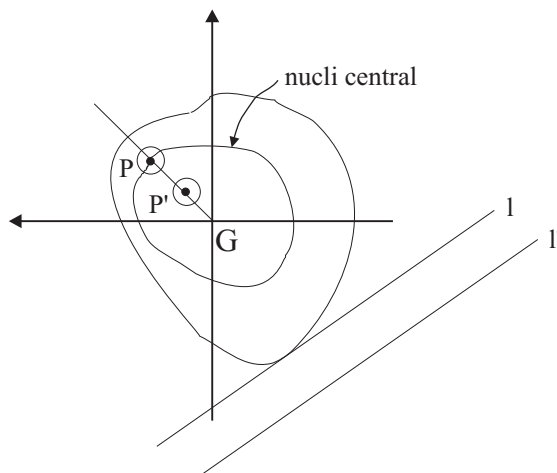


Fig. 7.2
Nucli central.

7.2. Problemes

Disseminem per X, Y, Z els eixos locals en les seccions transversals. Quan sigui necessari, definirem un eixos global i els designarem per $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Els eixos globals ens serviràn per identificar la secció transversal al llarg de la barra i els eixos locals per identificar els diferents punts de la secció transversal.

Problema 7.11

L'element estructural de la figura 7.3 està carregat com s'indica. Trobeu-ne les tensions màximes.

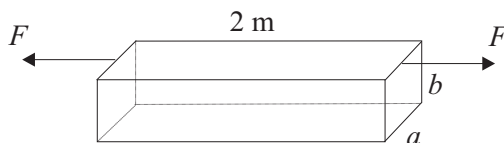
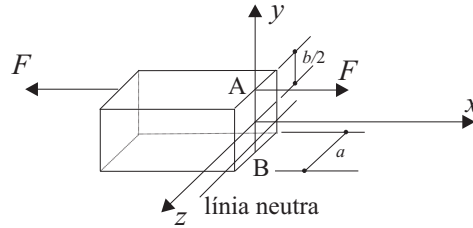


Fig. 7.3

Solució:

Una secció transversal qualsevol està sotmesa a una tracció excèntrica de valor F aplicada al punt de coordenades $z_p = 0$ i $y_p = b/2$ (fig. 7.4).

Fig. 7.4



Localitzem primerament la línia neutra. La tensió normal σ en un punt de coordenades (z, y) de la secció

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_P}{I_z} + \frac{Nz_P}{I_y}$$

i, per obtenir la línia neutra, fem $\sigma = 0$. Tenint en compte que $N = F$, tindrem

$$0 = \frac{F}{A} + \frac{Fy_P}{I_z} + \frac{Fz_P}{I_y}$$

que podem simplificar com

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{y_P}{I_z} + \frac{z_P}{I_y}$$

i, substituint $z_P = 0$ i $y_P = b/2$,

$$\frac{1}{ab} + \frac{0}{\frac{1}{12}ba^3} + \frac{b/2}{\frac{1}{12}ab^3} = 0$$

$$y = -b/6$$

que és una recta paral·lela a l'eix z (fig. 7.4). Així doncs, a tots els punts de la fibra superior de la secció (la que conté el punt A) hi haurà la tracció màxima i valdrà

$$\sigma_A = \frac{F}{ab} + \frac{Fb/2}{\frac{1}{12}ab^3} b/2 = \frac{4F}{ab}$$

A tots els punts de la fibra inferior de la secció (la que conté el punt B) hi haurà la compressió màxima i valdrà

$$\sigma_B = \frac{F}{ab} + \frac{Fb/2}{\frac{1}{12}ab^3} (-b/2) = \frac{-2F}{ab}$$

Fixem-nos que el punt B és més a prop de la línia neutra que el punt A; per tant, hi apareix una tensió més petita en valor absolut.



Problema 7.12

Trobeu les tensions normals als punts A, B, C i D de la figura 7.5, i l'equació de la línia neutra, i dibuixeu-la.

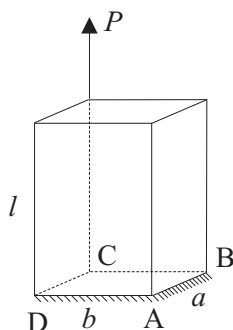


Fig. 7.5

Solució:

La secció ABCD està sotmesa a una tracció excèntrica de valor P , aplicada al punt de coordenades $z_p = -a/2$ i $y_p = b/2$ (fig. 7.6); per tant, i tenint en compte que $I_z = 1/12 \cdot ab^3$ i $I_y = 1/12 \cdot ba^3$, la tensió normal a cada un dels punts A, B, C i D serà

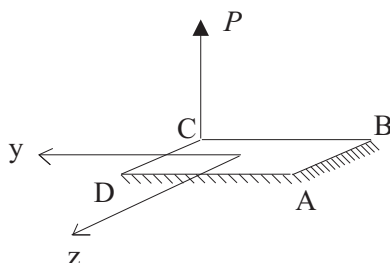


Fig. 7.6

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Py_p}{I_z}y + \frac{Pz_p}{I_y}z$$

$$\sigma_A = \frac{P}{ab} + \frac{Pb/2}{\frac{1}{12}ab^3}(-b/2) + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12}ba^3}a/2 = \frac{-5P}{ab}$$

$$\sigma_B = \frac{P}{ab} + \frac{Pb/2}{\frac{1}{12}ab^3}(-b/2) + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12}ba^3}(-a/2) = \frac{P}{ab}$$

$$\sigma_C = \frac{P}{ab} + \frac{Pb/2}{\frac{1}{12}ab^3}b/2 + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12}ba^3}(-a/2) = \frac{7P}{ab}$$

$$\sigma_D = \frac{P}{ab} + \frac{Pb/2}{\frac{1}{12}ab^3}b/2 + \frac{P(-a/2)}{\frac{1}{12}ba^3}a/2 = \frac{P}{ab}$$



La línia neutra té per equació

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{y_P}{I_z}y + \frac{z_P}{I_y}z$$

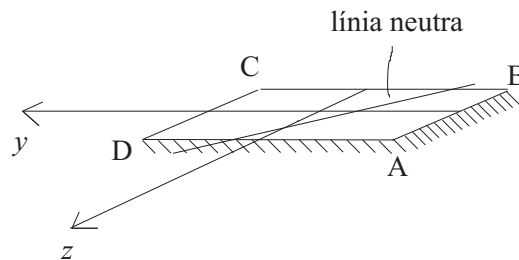
Substituint dades,

$$0 = \frac{1}{ab} + \frac{b/2}{\frac{1}{12}ab^3}y + \frac{-a/2}{\frac{1}{12}ba^3}z$$

$$0 = 1 + \frac{6}{b}y - \frac{6}{a}z$$

A la figura 7.7 es dibuixa la línia neutra sobre la secció

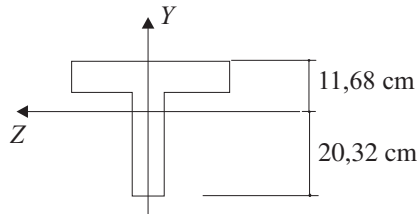
Fig. 7.7



Problema 7.13

A la secció de la figura 7.8, apliquem una força de compressió de 80 kN sobre l'eix Y. Sabent que les tensions màximes admissibles són en tracció 0,8 MPa i en compressió 8 MPa, trobeu les màximes distàncies, positiva i negativa, al centroide en les quals podem aplicar-hi la força. $I_z = 35.884,3 \text{ cm}^4$, $A = 400 \text{ cm}^2$.

Fig. 7.8



Solució:

Si la càrrega de compressió s'aplica per sobre del centroide (fig. 7.9a), la fibra superior serà la que experimentarà la compressió màxima i la inferior, la tracció màxima. Igualant als valors màxims admesos pel material, tindrem a la fibra superior,

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_p}{I_z} \cdot y + \frac{Nz_p}{I_y} \cdot z$$

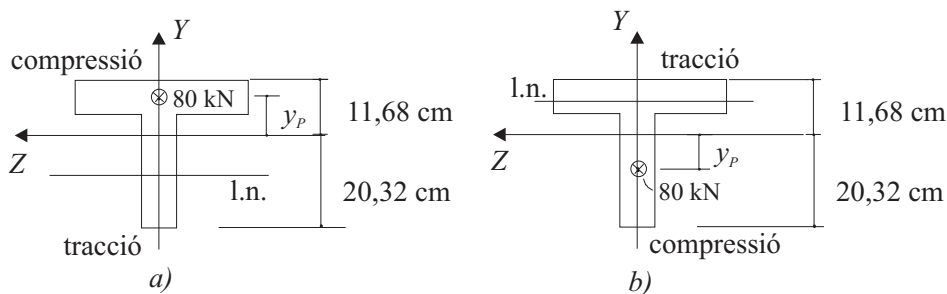


Fig. 7.9

$$800 \text{ N/cm}^2 = \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N}}{400 \text{ cm}^2} + \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N} y_p}{35.884,37 \text{ cm}^4} 11,68 \text{ cm}$$

$$y_p = 23 \text{ cm}$$

i a la inferior

$$80 \text{ N/cm}^2 = \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N}}{400 \text{ cm}^2} + \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N} y_p}{35.884,37 \text{ cm}^4} (-20,32 \text{ cm})$$

$$y_p = 6,18 \text{ cm}$$

Per tant, la alçada màxima a la qual podem col·locar la càrrega serà la més petita, és a dir, 6,18 cm. Observem que, per a $y_p = 6,18 \text{ cm}$, la tracció és la màxima permesa i la compressió està per sota del seu valor màxim. Si prenguéssim $y_p = 23 \text{ cm}$, la compressió estaria en el seu valor màxim, però la tracció el superaria.

Si la càrrega de compressió s'aplica per sota del centroid (fig. 7.9b), la fibra superior serà la que experimentarà la tracció màxima i la inferior, la compressió màxima. Igualant als valors màxims admesos pel material, tindrem, a la fibra superior

$$80 \text{ N/cm}^2 = \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N}}{400 \text{ cm}^2} + \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N} y_p}{35884,37 \text{ cm}^4} 11,68 \text{ cm}$$

$$y_p = -10,76 \text{ cm}$$

i, a la inferior,

$$-800 \text{ N/cm}^2 = \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N}}{400 \text{ cm}^2} + \frac{-8 \cdot 10^4 \text{ N} y_p}{35884,37 \text{ cm}^4} (-20,32 \text{ cm})$$

$$y_p = -13,24 \text{ cm}$$

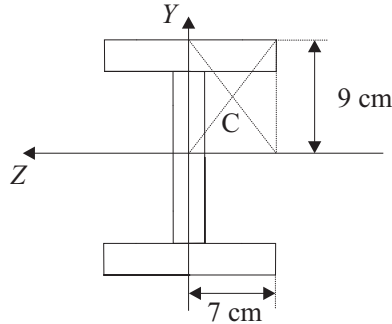
Per tant, la alçada màxima a què podem col·locar la càrrega serà la més petita en valor absolut, és a dir, $-10,76 \text{ cm}$. El raonament és el mateix que hem fet per a la càrrega col·locada per sobre del centroid.

Problema 7.14

Un pilar de 3 m d'altura està format per un perfil com el de la figura 7.10. Sobre ell actua una càrrega de compressió de 10^5 N en el punt C.

- Indiqueu raonadament si el punt d'aplicació C pertany al nucli central de la secció.
- Calculeu el punt o els punts sotmesos a més tensió i indiqueu-ne el valor. $A = 56 \text{ cm}^2$, $I_z = 2.700 \text{ cm}^4$, $I_y = 434 \text{ cm}^4$. c) Determineu-ne el nucli central i dibuxeu-lo.

Fig. 7.10



Solució:

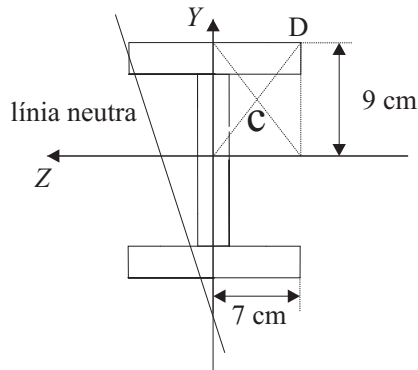
- Primerament, per tal de saber si el punt d'aplicació C pertany o no al nucli central, trobem la línia neutra; si aquesta talla la secció, voldrà dir que el punt C està situat fora del nucli central i, si és tangent o queda fora, voldrà dir que el punt C pertany al contorn del nucli central o a l'interior, respectivament.

Per trobar l'equació de la línia neutra, igualem a 0 la tensió

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_p}{I_z} \cdot y + \frac{Nz_p}{I_y} \cdot z = 0 \Rightarrow \frac{1}{56 \text{ cm}^2} + \frac{4,5 \text{ cm}}{2.700 \text{ cm}^4} \cdot y + \frac{-3,5 \text{ cm}}{434 \text{ cm}^4} \cdot z = 0$$

Donant valor 0 a z obtenim $y = -10,71 \text{ cm}$ i donant valor 0 a y obtenim $z = 2,21 \text{ cm}$. Observem que la línia neutra talla la secció (fig. 7.11); per tant el punt d'aplicació C està fora del nucli central.

Fig. 7.11





- b) La tensió màxima és en els punts més llunyans de la línia neutra, a banda i banda. En aquest cas, el punt més allunyat de la línia neutra es troba a la banda de compressió, al punt D, i la seva tensió val

$$\sigma_{m\grave{a}x}^c = N \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{I_z} y + \frac{z_p}{I_y} z \right)$$

$$\sigma_{m\grave{a}x}^c = -10^5 \text{ N} \cdot \left(\frac{1}{56 \text{ cm}^2} + \frac{4,5 \text{ cm}}{2.700 \text{ cm}^4} 9 \text{ cm} + \frac{-3,5 \text{ cm}}{434 \text{ cm}^4} (-7 \text{ cm}) \right) = -8.931 \text{ N/cm}^2$$

- c) Per determinar-ne el nucli central, localitzem els punts dels contorns d'aquest imposant que la línia neutra sigui tangent a la secció. Fent que la línia neutra sigui la recta $y = 9$ (fig. 7.12, línia 1), obtenim el punt 1.

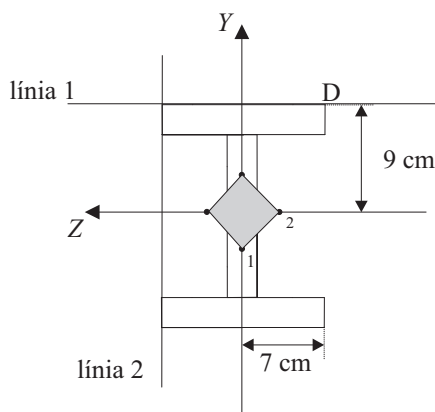


Fig. 7.12

$$0 = \frac{1}{56 \text{ cm}^2} + \frac{y_p}{2.700 \text{ cm}^4} (9 \text{ cm}) \Rightarrow y_p = -5,35 \text{ cm}$$

Fent que la línia neutra sigui la recta $z = 7$ cm (fig. 7.12, línia 2), obtenim el punt 2. Per simetria podem completar el contorn del nucli central.

$$0 = \frac{1}{56 \text{ cm}^2} + \frac{z_p}{434 \text{ cm}^4} 7 \text{ cm} \Rightarrow z_p = -1,12 \text{ cm}$$

Problema 7.15

Determineu la major força P de compressió que pot aplicar-se a l'alçada del punt D d'una barra recta el perfil de la qual es mostra a la figura 7.13, sabent que les tensions màximes admissibles per al material són de 30 MPa a tracció i 120 MPa a compressió. $A = 3.000 \text{ mm}^2$ i $I_z = 868 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$.

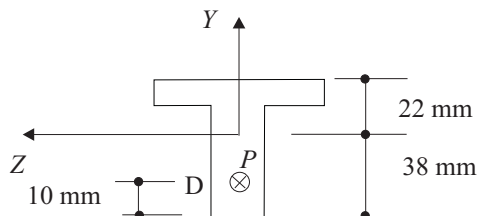


Fig. 7.13



Solució:

Observem que la línia d'acció de la càrrega P és fora del centroide, és a dir, que la secció treballa a compressió excèntrica. Per tant, la tensió en un punt qualsevol de la secció ve donada per l'equació

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_p}{I_z}y + \frac{Nz_p}{I_y}z$$

En aquest cas, $N = -P$. Com que la càrrega P és de compressió, observem que a la fibra inferior és on es produirà la compressió màxima i a la superior, la tracció màxima. Calculem la càrrega P perquè a la fibra inferior de la secció es produeixi una compressió de 120 MPa, que és la màxima que pot aguantar el material

$$\sigma_{màx}^c = -P\left(\frac{1}{3.000\text{mm}^2} + \frac{(-28\text{mm})}{868 \cdot 10^3\text{mm}^4}(-38\text{mm})\right) = -120\text{N/mm}^2$$

d'on

$$P = 76.965\text{N}$$

Calculem ara la càrrega P perquè a la fibra superior de la secció es produeixi una tracció de 30 MPa, que és la màxima que pot aguantar el material

$$\sigma_{màx}^t = -P\left(\frac{1}{3.000\text{mm}^2} + \frac{(-28\text{mm})}{868 \cdot 10^3\text{mm}^4} \cdot (22\text{mm})\right) = 30\text{N/mm}^2$$

d'on

$$P = 79.714\text{N}$$

per tant, la major força P que pot suportar la barra és la mínima de les dues possibles, $P = 76.965\text{ kN}$.

Problema 7.16

Sabent que la tensió màxima admissible és 150 MPa per al material de la barra de la figura 7.14, determineu la major força P que pot aplicar-s'hi. Trobeu l'equació de la línia neutra i dibuixeu-la. Localitzeu-ne el nucli central. $A = 2.400\text{mm}^2$, $I_z = 136 \cdot 10^4\text{mm}^4$, $I_y = 40 \cdot 10^4\text{mm}^4$.

Solució:

Sobre una secció transversal qualsevol de la barra, actua una força P de tracció aplicada a l'eix y fora del centroide, és a dir, hi actua una tracció excèntrica (fig. 7.15); així la tensió normal vindrà donada per l'equació

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_p}{I_z}y + \frac{Nz_p}{I_y}z$$



Fig. 7.14

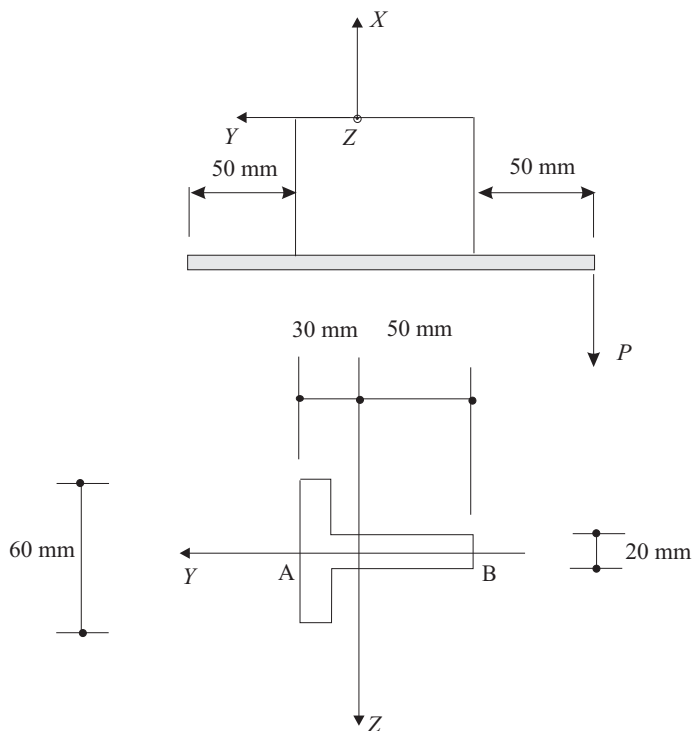
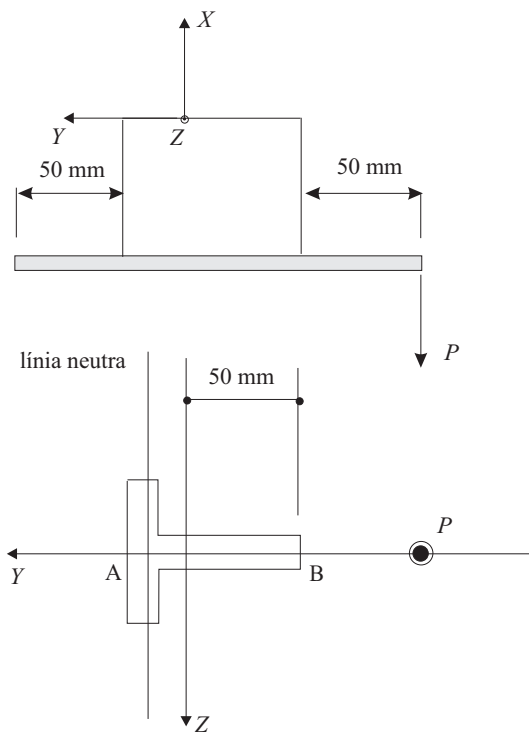


Fig. 7.15



En aquest cas, $N = P$ i les coordenades del punt d'aplicació de la càrrega són $z_P = 0$ i $y_P = -100$ mm. Els punts on apareixeran tensions màximes seran els de la fibra paral·lela a la línia neutra que contenen el punt B, que té de coordenades $z = 0$ i $y = -50$ mm, ja que aquests són els punts que estan més lluny de línia neutra. Així, substituint dades

$$\sigma_B = \frac{P}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{P(-100 \text{ mm})}{136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}(-50 \text{ mm})$$

i, igualant al màxim que és capaç d'aguantar el material,

$$150 \text{ N/mm}^2 = \frac{P}{2,400 \text{ mm}^2} + \frac{P(-100 \text{ mm})}{136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}(-50 \text{ mm})$$

d'on

$$P = 36.646,7N = 36,64kN$$

L'equació de la línia neutra és

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{y_p}{I_z}y + \frac{z_p}{I_y}z$$

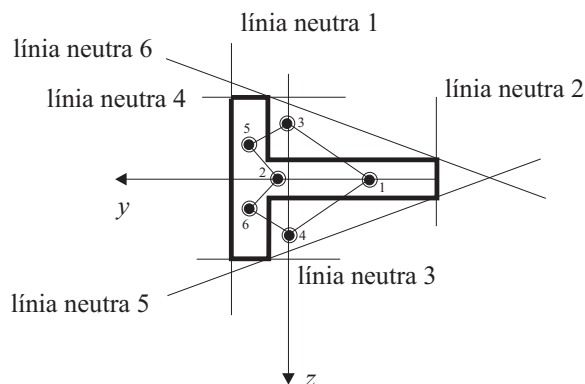
En aquest cas, és $z_P = 0$ i $y_P = -100\text{ mm}$,

$$0 = \frac{1}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{1(-100 \text{ mm})}{136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} y$$

$y = 5,6 \text{ mm}$

Per localitzar el nucli central, hem d'establir successives línies neutres, que coincideixin amb les arestes de la secció però que no la tallin (fig. 7.16).

Fig. 7.16



Fent que la línia neutra tingui per equació $y = 30\text{ mm}$ (línia neutra 1), obtenim

$$0 = \frac{1}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{y_P}{136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} (30 \text{ mm}) \Rightarrow y_P = -18,99 \text{ mm}$$

que és el punt on s'ha d'aplicar una càrrega sobre l'eix y perquè la línia neutra sigui la 1.



Fent que la línia neutra tingui per equació $y = -50 \text{ mm}$ (línia neutra 2), obtenim

$$0 = \frac{1}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{y_p}{136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} (-50 \text{ mm}) \Rightarrow y_p = 11,3 \text{ mm}$$

que és el punt on s'ha d'aplicar una càrrega sobre l'eix y perquè la línia neutra sigui la 2.

Fent que la línia neutra tingui per equació $z = 30 \text{ mm}$ (línia neutra 3), obtenim

$$0 = \frac{1}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{z_p}{40 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} (30 \text{ mm}) \Rightarrow z_p = -5,55 \text{ mm}$$

que és el punt on s'ha d'aplicar una càrrega sobre l'eix z perquè la línia neutra sigui la 3.

Fent que la línia neutra tingui per equació $z = -30 \text{ mm}$ (línia neutra 4), obtenim

$$0 = \frac{1}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{z_p}{40 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} (-30 \text{ mm}) \Rightarrow z_p = 5,55 \text{ mm}$$

que és el punt on s'ha d'aplicar una càrrega sobre l'eix z perquè la línia neutra sigui la 4.

Observem que, si girem la línia neutra 1 per passar a la 4, cap línia de les obtingudes talla la secció; això vol dir que podem unir els punts 1 i 4 amb una línia recta. En canvi, no podem passar directament de la línia 4 a la 2, hem de passar per una altra línia intermèdia, la 6, a la qual li correspondrà el punt 6. Les coordenades del punt 6 les obtenim fent que la línia neutra passi simultàniament pels punts $z = -30 \text{ mm}$, $y = 10 \text{ mm}$ i $z = -10 \text{ mm}$ i $y = -50 \text{ mm}$

$$0 = \frac{1}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{y_p}{136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} 10 \text{ mm} + \frac{z_p}{40 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} (-30 \text{ mm})$$

$$0 = \frac{1}{2.400 \text{ mm}^2} + \frac{y_p}{136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} (-50 \text{ mm}) + \frac{z_p}{40 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} (-10 \text{ mm})$$

d'on obtenim el punt 6

$$z_p = 6,25 \text{ mm}, \quad y_p = 7,08 \text{ mm}$$

Per simetria, obtindrem el punt 5, que tindrà per coordenades

$$z_p = -6,25 \text{ mm}, \quad y_p = 7,08 \text{ mm}$$

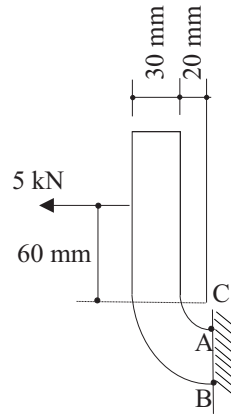
Unint els diversos punts obtinguts podem dibuixar el nucli central.

Problema 7.17

La barra de la figura 7.17 té una secció transversal de $30 \times 30 \text{ mm}^2$. Trobeu la tensió σ als punts A i B.



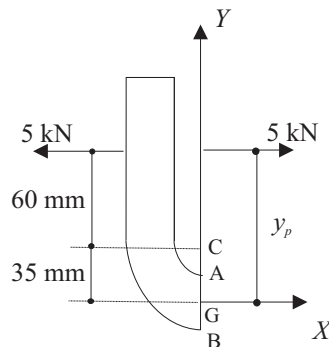
Fig. 7.17



Solució:

La secció que passa per A i B està sotmesa a una tracció excèntrica. L'esforç normal N val 5 kN i està aplicat a l'eix Y a una distància $y_p = 95$ mm del centroide de la secció (fig. 7.18). Substituint dades i tenint en compte que $z_p = 0$, la tensió en el punt A valdrà

Fig. 7.18



$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{N y_p}{I_z} y + \frac{N z_p}{I_y} z$$

$$\sigma_A = 5 \text{ kN} \cdot \left(\frac{1}{900 \text{ mm}^2} + \frac{95 \text{ mm}}{67.500 \text{ mm}^4} \cdot 15 \text{ mm} \right) = 0,11 \text{ kN/mm}^2 = 110 \text{ MPa}$$

i en el punt B

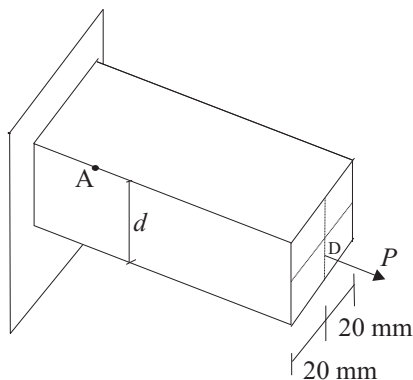
$$\sigma_B = 5 \text{ kN} \cdot \left(\frac{1}{900 \text{ mm}^2} + \frac{95 \text{ mm}}{67.500 \text{ mm}^4} \cdot (-15 \text{ mm}) \right) = -0,1 \text{ kN/mm}^2 = -100 \text{ MPa}$$

Problema 7.18

La força axial 30 kN està situada al punt D a 25 mm per sobre de la fibra inferior de la barra que es mostra a la figura 7.19. Determineu l'alçada d per la qual la tensió al punt A és màxima i el valor corresponent d'aquesta tensió.



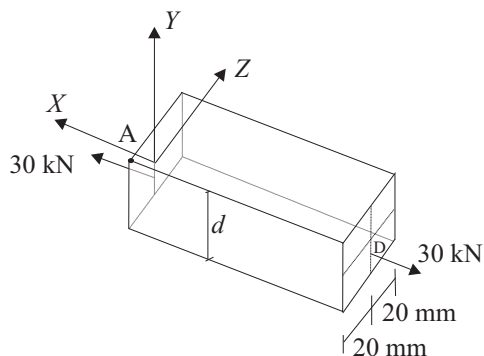
Fig. 7.19



Solució:

El primer que s'observa és que els esforços són els mateixos en totes les seccions de la barra; per tant el punt A podria estar a qualsevol secció. Fent un tall a la secció que passa per A (fig. 7.20), observem que l'únic esforç necessari perquè la peça estigui en equilibri és que a la secció aparegui un esforç normal de 30 kN en la mateixa línia d'acció que la càrrega externa aplicada a l'extrem. Per tant, el que tenim a la secció transversal que passa per A és una tracció excèntrica. Naturalment, podríem haver dibuixat un esforç normal i un moment flector i trobar-los aplicant les equacions d'equilibri ja que sabem que una tracció excèntrica és equivalent a un esforç normal més un moment flector.

Fig. 7.20



La tensió normal en un punt de coordenades z, y , deguda a una càrrega excèntrica P , aplicada en un punt de coordenades (z_p, y_p) és

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_p}{I_z}y + \frac{Nz_p}{I_y}z$$

en aquest cas, $N = 30 \text{ kN}$, $z_p = 0$, $y_p = -(d/2 - 25 \text{ mm})$, $A = 40 \text{ mm} \cdot d$, $I_z = 1/12 \cdot 40 \text{ mm} \cdot d^3$. Així, al punt A, on $z = -20 \text{ mm}$ i $y = d/2$ la tensió val

$$\sigma_A = \frac{30 \text{ kN}}{40 \text{ mm} \cdot d} + \frac{30 \text{ kN}(-d/2 + 25 \text{ mm})}{1/12 \cdot 40 \text{ mm} \cdot d^3}d/2$$



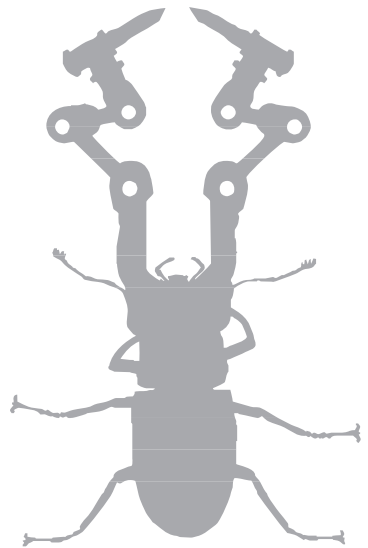
Si la tensió en el punt A ha de ser màxima, derivem σ_A respecte a d i igualem a zero, s'obté

$$d = 150 \text{ mm}$$

i, substituint, la tensió corresponent al punt A serà

$$\sigma_A = -0,005 \text{ kN/mm}^2 = -5 \text{ MPa}$$

que correspon a una compressió.



→ 8

Cisallament

8.1. Cas general

El raonament de simetria que vàrem fer en estudiar la tracció o compressió i la flexió, que ens permetia establir que, en presència d'aquests esforços, les seccions transversals es mantenen planes i perpendiculars a la línia de centroides en l'estat deformat, no és vàlid quan tenim esforços de cisallament. No podem imaginar cap situació en la qual, a les seccions transversals, hi hagi un esforç de cisallament constant i, a la vegada, hi hagi simetria respecte d'una secció central que puguem considerar, doncs, que es manté plana.

Podem imaginar, per exemple, una barra encastada a l'esquerra (fig. 8.1a) i amb una càrrega vertical aplicada a l'extrem. En aquest cas, és cert que l'esforç de cisallament és constant al llarg de la barra; per tant, la deformació per cisallament serà la mateixa en totes elles, però no hi ha simetria respecte d'una secció central. Una altra situació que podem imaginar és una barra recolzada en els dos extrems amb una càrrega vertical aplicada al mig (fig. 8.1b); en aquest cas, la secció central es manté plana per simetria, però no podem dir que totes les seccions tenen la mateixa deformació per cisallament ja que aquest esforç no és constant en elles (té sentits diferents en les dues meitats).

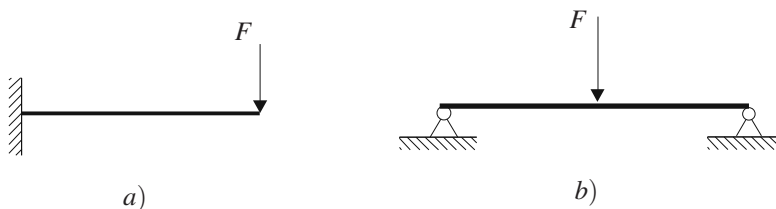


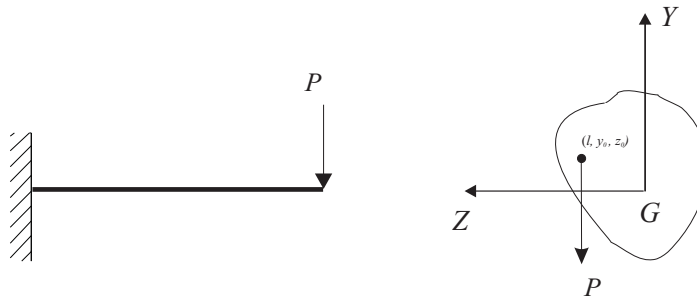
Fig. 8.1
Situacions per analitzar el compliment de la hipòtesi de Navier de seccions planes en presència d'esforços de cisallament.

La conclusió és, doncs, que, en presència d'esforços de cisallament, no hi cap raonament de simetria que faci que es compleixi la hipòtesi de Navier que les seccions es mantenen planes (veurem més avall que, certament, no es mantenen planes). Així; el procediment utilitzat en estudiar la tracció o compressió i la flexió pura no ens serveix per al cas que hi hagi un esforç de cisallament.

Per al càlcul de les tensions, seguirem el procediment anomenat *semi-invers*, degut a Saint-Venant. Aquest consisteix a “endevinar” una solució, per analogia amb alguna altra situació similar, i tot seguit provar que és la solució correcta tot demostrant que compleix les equacions de l'elasticitat que ha de complir; que són les equacions d'equilibri, les de contorn i les equacions de compatibilitat. La unicitat de la solució està assegurada pel teorema d'unicitat (degut a Kirchhoff) [2]. Si la solució de prova conté solament termes lineals o constants per a les tensions (i, per tant, per a les deformacions), i atès que les equacions de compatibilitat 2.20 tenen solament segones derivades de les deformacions, el seu compliment està assegurat. N'hi ha prou, doncs, que la solució compleixi les equacions d'equilibri i les de contorn.

Sigui una barra rectilínia de longitud l i de secció arbitrària encastada a l'extrem esquerre i amb una càrrega P en la direcció d'un dels dos eixos principals de les seccions transversals, suposarem l'eix Y , aplicada al punt (y_0, z_0, l) (fig. 8.2).

Fig. 8.2
Flexió amb càrrega transversal.



En un secció transversal qualsevol, situada a distància x de l'extrem esquerre, el moment flector val

$$M_z = -P(l - x)$$

Per tant, és lògic suposar, per analogia amb la flexió, que l'estat tensional vindrà donat per

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{zy} = 0 \quad \sigma_{xx} = \frac{P(l - x)}{I_z} y$$

i σ_{xy} i σ_{xz} quedaran per determinar. Les tensions suposades així han de complir les equacions d'equilibri, les de compatibilitat i les condicions de contorn.

El compliment de les equacions d'equilibri implica

$$\begin{aligned} -\frac{Py}{I_z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

De la segona i la tercera equacions, es dedueix que les tensions σ_{yx} i σ_{zx} tenen els mateixos valors en totes les seccions transversals de la barra. La primera equació es pot escriure com

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{xy} - \frac{Py^2}{2I_z} \right) = 0$$

que es compleix idènticament si posem

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad \sigma_{xy} - \frac{Py^2}{2I_z} = \frac{\partial F}{\partial z} + f(z)$$

on $F(y, z)$ és l'anomenada *funció de tensions* i f és una funció que depèn solament de z i es determina amb les condicions de contorn. Per tant, obtenim

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{Py^2}{2I_z} + f(z) \quad (8.2)$$

També s'han de complir les equacions de compatibilitat 2.39 en termes de les tensions, equacions de Beltrami-Michell. En aquest cas, es redueixen a

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{zx} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_{yx} + \frac{1}{1+\nu} \left(-\frac{P}{I_z} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Substituint 8.2 a 8.3, s'obté

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 F) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 F) + \frac{P}{I_z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{P}{I_z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

i simplificant

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 F) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 F) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{P}{I_z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

i d'aquí podem escriure

$$\nabla^2 F = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Pz}{I_z} - \frac{\partial f}{\partial z} + 2G\alpha$$

on $2G\alpha$ és una constant d'integració. Més avall veurem el significat físic de α . Desenvolupant l'operador ∇ en components



$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Pz}{I_z} - \frac{\partial f}{\partial z} + 2G\alpha \quad (8.4)$$

La determinació de l'estat tensional quedarà resolta quan coneguem F , i s'han de complir les condicions de contorn, tant en la superfície lateral de la barra com en els extrems (f vindrà determinada també per les condicions de contorn).

Vegem el significat físic de la constant d'integració α . Cada element d'àrea de la secció transversal gira en el seu propi pla, és a dir, al voltant de l'eix X , un angle donat per la component x del vector de rotació definit a 2.11

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

així, la variació d'aquesta rotació al llarg de l'eix X , és a dir, la *rotació unitària local* serà a cada punt, tenint en compte 8.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial u_{xy}}{\partial z} = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

i, substituint 8.4, obtenim

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\nu Pz}{EI_z} + \alpha$$

Així, veiem que, en passar els eixos Y, Z pel centroid de la secció, α és *el valor mitjà de la rotació unitària dels punts de la secció transversal* (també coincideix amb la rotació unitària local del centroid de la secció). La determinació de α , l'obtindrem resolent 8.4 amb la condició de contorn que la distribució de tensions ha de ser equivalent a P . Concretament, de l'equivalència de moments respecte de G (podríem prendre qualsevol altre punt) tindrem

$$\int_A (y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx}) dA = z_0 P$$

on A és l'àrea de la secció transversal.

Naturalment, si traslладem la càrrega P paral·lelament a la seva recta d'acció, la distribució de tensions varia i també ho fa la rotació mitjana α . Hi ha, doncs, un punt $C = (y_c, z_c)$ tal que, aplicant-hi P , s'obté $\alpha = 0$; aquest punt s'anomena *centre de cisallament* (també *centre de flexió*). És a dir, si apliquem la càrrega en C , els diferents punts de la secció poden girar però el gir mitjà és zero.

La localització de C la podem obtenir de l'equivalència de moments

$$\int_A (y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx})dA = z_c P$$

on σ_{zx} i σ_{yx} són les tensions presents a la secció quan $\alpha = 0$, és a dir, les obtingudes de 8.4 fent $\alpha = 0$.

Tenint, doncs, la càrrega P aplicada en un punt qualsevol (y_0, z_0, l) , podem traslladar-la al centre de cisallament C afegint-hi un moment de valor $(z_0 - z_c)P$. Així, *el problema de la flexió amb càrrega transversal el podem considerar com la superposició de dos problemes més simples: una flexió sense rotació mitjana produïda per la càrrega, aplicada al centre de cisallament, més una rotació pura, produïda pel moment $(z_0 - z_c)P$ (fig. 8.3).*

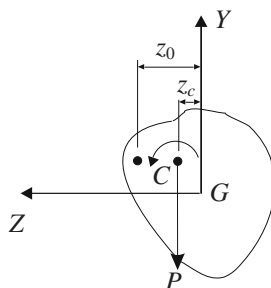


Fig. 8.3
Centre de cisallament.

Per calcular la distribució exacta de les tensions de cisallament, s'ha de resoldre, com hem dit, 8.4 amb les condicions de contorn adequades. Remetem el lector als llibres de Sokolnikoff [11] i Timoshenko i Goodier [13] per al desenvolupament en diferents perfils. Es poden obtenir, però, uns resultats parcials aplicant únicament l'equilibri en direcció de l'eix de la barra i calculant únicament les tensions de cisallament mitjanes al llarg d'una línia de la secció transversal; aquests resultats són particularment útils en perfils rectangulars massissos i en perfils de paret prima, ambdós tipus molt utilitzats en enginyeria. Aquest procediment forma part del que s'anomena *teoria elemental de les barres*.

8.2. Teoria elemental de les barres

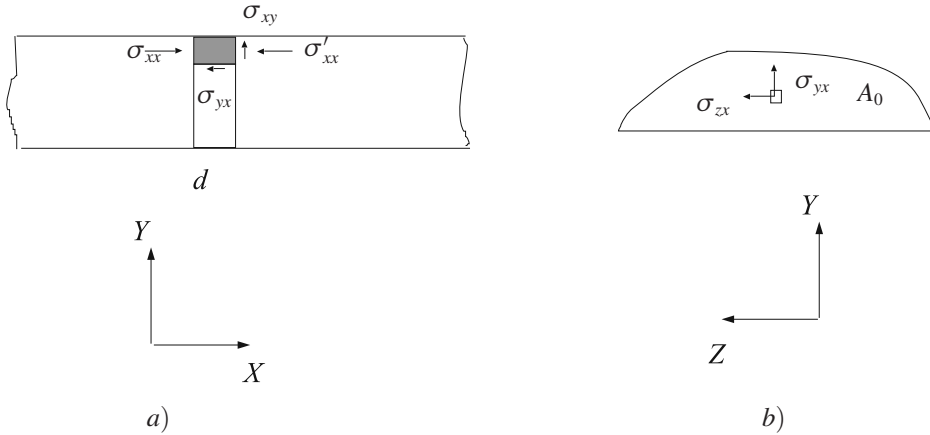
Considerem un element diferencial de barra de gruix dx (fig. 8.4a). L'existència de l'esforç de cisallament, que a partir d'ara designarem per Q i que considerarem en la direcció de l'eix Y , implica, d'acord amb l'equació d'equilibri 3.2, que hi ha d'haver una variació de moment flector al llarg de la barra; a la cara de l'esquerra de l'element suposarem un moment M_z i a la cara de la dreta, $M_z + dM_z$. Així doncs, les tensions presents a la secció transversal són tensions normals σ_{xx} produïdes pel moment flector i tensions de cisallament σ_{yx} i σ_{zx} produïdes per l'esforç de cisallament.

És evident que s'ha de complir

$$\int_A \sigma_{yx} = Q \quad \int_A \sigma_{zx} = 0$$

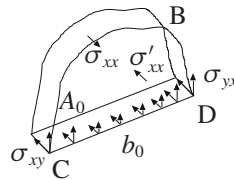


Fig. 8.4
Anàlisi de les tensions de cisallament.



Calculem les tensions σ_{yx} . Tallem l'element diferencial per un pla paral·lel al pla X,Z; aïllem la part superior ABCD (fig. 8.5) i apliquem l'equilibri en direcció X; n'obindrem les σ_{xy} , que són iguals a les σ_{yx} , com ja sabem. Tindrem

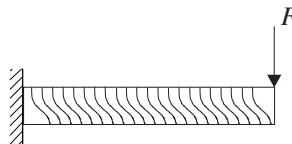
Fig. 8.5
Tall de l'element per diferencial per calcular σ_{yx} .



$$\int_{A_0} \sigma_{xx} dA = \int_{A_0} \sigma'_{xx} dA + \sigma_{xy}^{mitjana} b_0 dx \quad (8.5)$$

on A_0 és l'àrea que queda per sobre del punt on estem calculant el cisallament; b_0 , l'amplada de la secció en el mateix punt i $\sigma_{xy}^{mitjana}$, la tensió de cisallament mitjana al llarg de la línia CD, que designarem simplement per τ ; σ_{xx} és la tensió normal a la cara de darrere (produïda per M), i σ'_{xx} és la tensió normal a la cara de davant (produïda per $M + dM$). El valor de les tensions normals a l'expressió anterior el podem obtenir aplicant l'equació 6.5 de la flexió pura, sempre que no estiguem analitzant una secció que estigui sota una càrrega repartida. La raó que puguem continuar aplicant 6.5 a pesar que, en el cas que ens ocupa, no hi ha cap garantia que les seccions transversals es mantinguin planes en produir-se la deformació per cisallament, la podem visualitzar a la figura 8.6 on està dibuixada la deformació per cisallament (hi faltaria afegir la deformació addicional per flexió). En ser l'esforç de cisallament el mateix a totes les seccions, la deformació per cisallament serà la mateixa; així, encara que les seccions no es mantinguin planes, l'allargament o escurçament de les fibres serà el mateix que si tan sols hi hagués moment flector, és a dir, podem continuar utilitzant la fórmula de la flexió per calcular σ_{xx} .

Fig. 8.6
Deformació per cisallament en el cas d'esforç de cisallament constant. No està dibuixada la deformació addicional per flexió.





Tenint en compte el raonament anterior, podem escriure per 8.5

$$\int_{A_0} \frac{M_z}{I_z} y dA = \int_{A_0} \frac{M_z + dM_z}{I_z} y dA + \tau b_0 dx$$

Simplificant,

$$0 = \frac{dM_z}{I_z} \int_{A_0} y dA + \tau b_0 dx$$

La integral del membre de la dreta és el *moment estàtic de la secció A_0 respecte de l'eix Z* , que designarem per S_0^* ; d'altra banda, segons 6.15 i 6.17, $\frac{dM_z}{dx} = -Q$; així doncs,

$$\tau = \frac{QS_0^*}{I_z b_0} \quad (8.6)$$

que es coneix amb el nom de *lleï de Colignon*. Observem que la tensió de cisallament no és constant en els diferents punts de la secció, ni tan sols en els diferents punts de la línia CD , com ja hem vist més amunt i, per tant, tampoc la deformació angular. Això implica el que hem dit al començament del capítol: que les seccions no es mantenen planes, és a dir, *no es compleix la hipòtesi de Navier*.

D'altra banda, la tensió de cisallament als extrems superior i inferior de la secció és zero, sigui quina sigui la forma de la secció, ja que S_0^* també ho és. Que S_0^* és zero en els punts superiors és clar perquè no hi ha àrea per damunt del punt per integrar; que ho sigui en els punts inferiors de la secció es deu al fet que, en integrar sobre tota la secció, el valor de S_0^* serà

$$\int_A y dA = A\bar{y}$$

essent \bar{y} la coordenada y del centroid de la secció, que és zero, pel fet que els eixos els hem triat de manera que passin pel centroid.

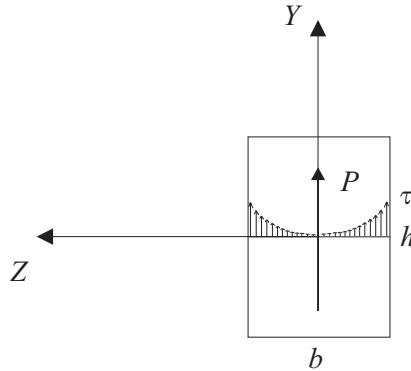
Observem també que el valor mitjà de σ_{yx} en una línia paral·lela a l'eix Z , donat per la lleï de Colignon, no depèn d'on estigui col·locada la càrrega Q , sempre que sigui paral·lela a l'eix Y . Sí que és diferent, però, la distribució tant de les σ_{yx} com de les σ_{zx} .

En el cas d'una secció rectangular d'amplada b i alçada h , suposant que la càrrega P actua sobre l'eix principal Y (fig. 8.7), es pot comprovar, resolent l'equació general 8.4 [13], que les tensions màximes es produeixen sobre l'eix Z ; a més, sobre aquest eix $\sigma_{zx} = 0$, és a dir, només hi ha tensions de cisallament en la direcció de la càrrega aplicada.

La distribució de σ_{yx} és la indicada a la figura 8.7, prenent valors màxims en els extrems, tal com s'indica.

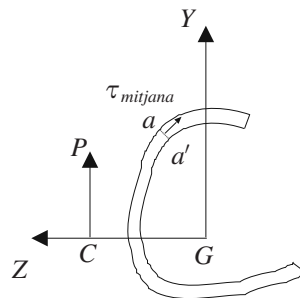
Si l'amplada b de la secció és molt més petita que l'alçada h , es pot comprovar també que els valors màxims de σ_{yx} obtinguts d'una manera exacta difereixen molt poc del valor mitjà donat per la lleï de Colignon.

Fig. 8.7
Tensions de cisallament
en un perfil rectangular.



Per acabar, analitzem la distribució de tensions de cisallament en un perfil prim de forma arbitrària, de gruix e (fig. 8.8).

Fig. 8.8
Tensió de cisallament
mitjana en un punt d'un
perfil prim.

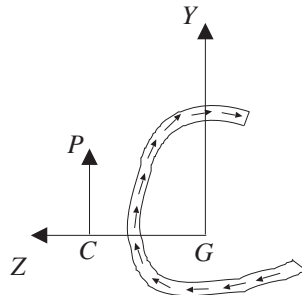


Tallant la secció transversal per una línia qualsevol $a - a'$ perpendicular al contorn del perfil, aïllant qualsevol de les dues porcions obtingudes i aplicant l'equilibri en direcció X obtindrem la llei de Colignon en la forma

$$\tau_{mitjana} = \frac{QS_0^*}{I_z e}$$

on $\tau_{mitjana}$ és la tensió de cisallament mitjana en la direcció que segueix el perfil. Atès que el gruix el considerem molt petit, les components perpendiculars a la línia central del perfil les podem considerar negligibles. Així, la distribució de les tensions de cisallament a la secció, suposant que la càrrega s'aplica al centre de cisallament, és la indicada a la figura 8.9, ja que és la distribució que fa que la rotació mitjana dels punts de la secció sigui zero.

Fig. 8.9
Tensions de cisallament
en un perfil prim amb la
càrrega aplicada al
centre de cisallament.



Si la càrrega s'aplica en un punt M fora del centre de cisallament C , la situació és la indicada a la figura 8.10. La distribució de tensions de cisallament és la superposició de les produïdes per la càrrega aplicada al centre de cisallament més les produïdes per la rotació pura del moment torsor que resulta de traslladar la càrrega de M a C .

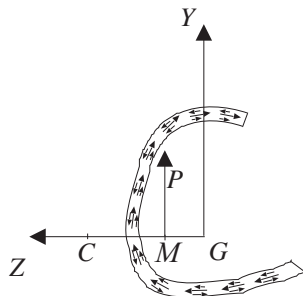


Fig. 8.10
Tensions de cisallament en un perfil prim amb la càrrega aplicada fora del centre de cisallament.

L'anàlisi de les deformacions per cisallament el farem, per consideracions energètiques, al capítol 13, en introduir l'anomenada *deformacio angular mitjana* de la secció transversal i l'àrea reduïda, i l'equació que se n'obté és la 13.22.

8.3. Problemes

Problema 8.1

Dibuixeu la distribució d'esforços de cisallament en el perfil en doble T de la figura 8.11. Preneu $Q=14.000$ N. $I_z = 17.152$ cm⁴.

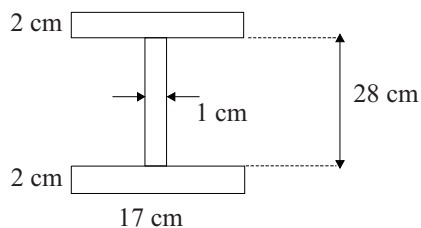


Fig. 8.11

Solució:

Dividim el perfil en tres zones: les dues ales i l'ànima (fig. 8.12) i n'anàlitzem cada una d'elles.

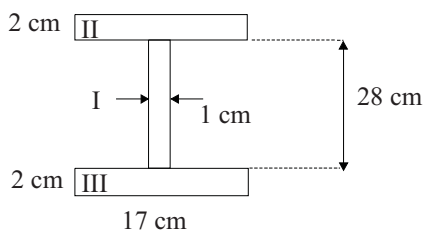
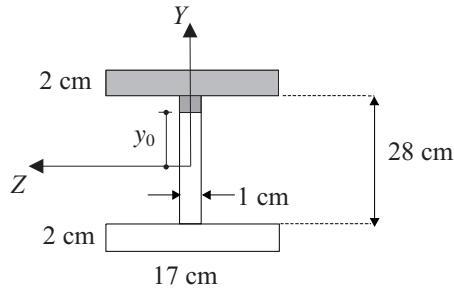


Fig. 8.12



Zona I. Prenem un punt qualsevol dins la zona a una alçada y_0 des del centre de gravetat (fig. 8.13). El domini és $-14 < y_0 < 14$.

Fig. 8.13



La tensió de cisallament en una línia paral·lela a l'eix z a l'alçada y_0 és, segons la llei de Colignon,

$$\tau = \frac{QS_0^*}{I_c b_0}$$

El moment estàtic és la integral estesa sobre l'àrea ombrejada i val

$$S_0^* = \int_{A_0} y dA = \int_{y_0}^{14} y 1 dy + \int_{14}^{16} y 17 dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_0}^{14} + \left[17 \frac{y^2}{2} \right]_{14}^{16} = 608 - \frac{y_0^2}{2}$$

Així,

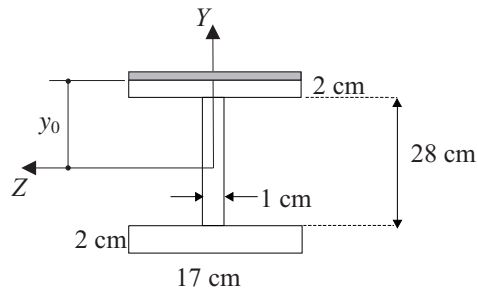
$$\tau = \frac{14.000(608 - \frac{y_0^2}{2})}{17.152 \cdot 1} = 496 - 0,408 y_0^2$$

donant valors a y_0 ,

$$\tau(0) = 496 \text{ N/cm}^2 \quad \tau(14) = \tau(-14) = 416 \text{ N/cm}^2$$

Zona II. Prenem un punt qualsevol dins la zona a una alçada y_0 des del centre de gravetat (fig. 8.14). El domini és $14 < y_0 < 16$.

Fig. 8.14



La tensió de cisallament en una línia paral·lela a l'eix z a l'alçada y_0 és, segons la llei de Colignon,

$$\tau = \frac{QS_0^*}{I_z b_0}$$

El moment estàtic és la integral estesa sobre l'àrea ombrejada i val

$$S_0^* = \int_{A_0} y dA = \int_{y_0}^{16} y 17 dy = \left[17 \frac{y^2}{2} \right]_{y_0}^{16} = 2.176 - 8,5y_0^2$$

Així,

$$\tau = \frac{14.000(2.176 - 8,5y_0^2)}{17.152 \cdot 17} = 104,45 - 0,408y_0^2$$

i, donant valors a y_0 ,

$$\tau(14) = 24,48 \text{ N/cm}^2; \quad \tau(16) = 0$$

Per fer l'anàlisi de la regió III, en calcular el moment estàtic S_0^* integrem sobre la part de baix, en comptes de fer-ho sobre la part de dalt (això es pot fer ja que la integral sobre tota la secció és zero en passar els eixos pel centre de la secció). Així, es veu que obtindrem exactament el mateix que el que hem obtingut per la regió II.

La gràfica de distribució d'esforços de cisallament està representada a la figura 8.15

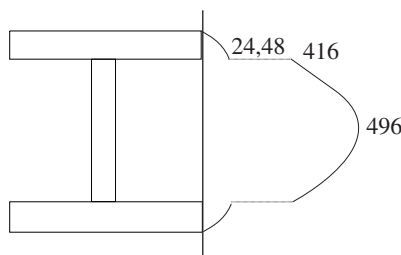


Fig. 8.15

Problema 8.2

Trobeu la distribució de tensions de cisallament en una secció rectangular sobre la qual actua un esforç de cisallament Q (fig. 8.16).

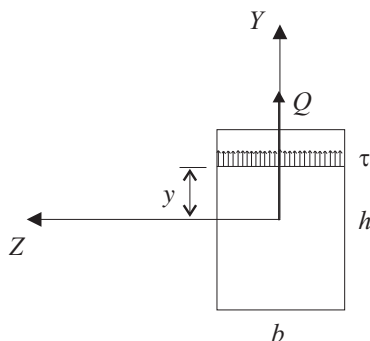


Fig. 8.16



La tensió de cisallament mitjana en una línia paral·lela a l'eix z a l'alçada y és (fig. 8.16), segons la llei de Colignon,

$$\tau = \frac{QS_0^*}{I_z b_0}$$

El moment estàtic val

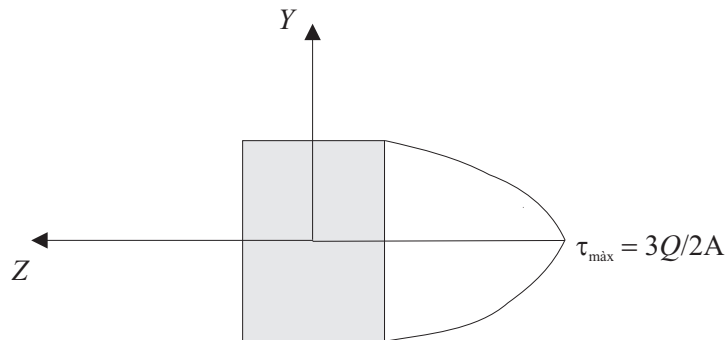
$$S_0^* = \int_{A_0} y dA = \int_y^{h/2} y b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Substituint,

$$\tau = \frac{Q \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{1}{12} b h^3 b} = \frac{3Q}{2bh^3} (h^2 - 4y^2)$$

La representació gràfica de $\tau(y)$ és una paràbola (fig. 8.17).

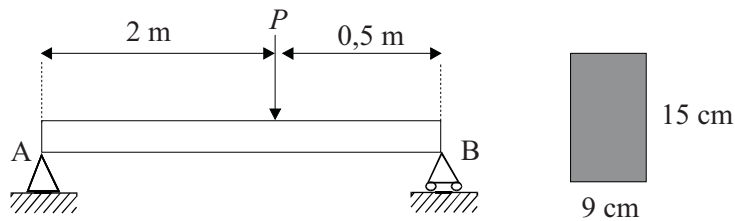
Fig. 8.17



Problema 8.3

Una biga de fusta simplement recolzada, de secció rectangular, està carregada amb una força puntual P (fig. 8.18). La tensió de cisallament màxima admissible és de 0,8 MPa. Determineu el major valor possible de P .

Fig. 8.18



Solució:

Les reaccions s'indiquen a la figura 8.19.

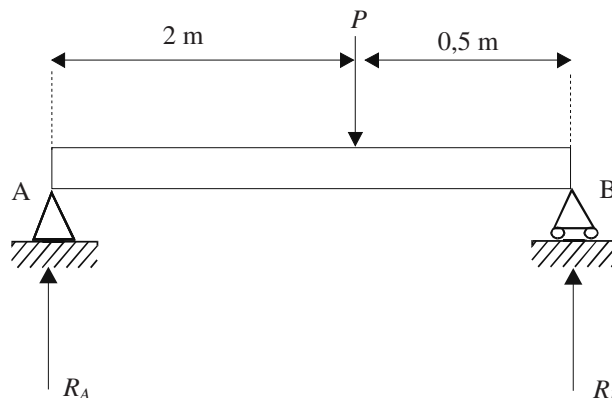


Fig. 8.19

Aplicant-hi les equacions d'equilibri

$$R_A + R_B = P$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P \cdot 2 = R_B \cdot 2,5$$

d'on $R_B = 0,8P$ i $R_A = 0,2P$

Així, a la regió a l'esquerra de la càrrega P l'esforç de cisallament és constant i val $Q = 0,2P$ i a la dreta, $Q = 0,8P$; per tant n'hi haurà prou a analitzar una secció qualsevol de la regió de la dreta. Calculem la tensió de cisallament al centroide ja que és on és màxima per a una secció rectangular. Utilitzant la llei de Colignon,

$$\tau = \frac{QS_0^*}{I_z b_0}$$

i el moment estàtic S_0^* al centroide val

$$S_0^* = \int_0^{7,5} y 9 dy = 253,2 \text{ cm}^3$$

per tant,

$$\tau_{\max} = 80 \text{ N/cm}^2 = \frac{0,8P \cdot 253,2 \text{ cm}^3}{\frac{1}{12} 9 \cdot 15^3 \text{ cm}^3 \cdot 9 \text{ cm}}$$

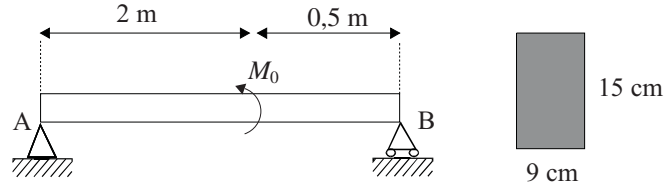
d'on $P = 8.820 \text{ N}$

Problema 8.4

Una biga de fusta simplement recolzada, de secció rectangular està carregada amb un moment puntual M_0 (fig. 8.20). La tensió de cisallament màxima admissible és de $0,8 \text{ MPa}$. Determineu el major valor possible de M_0 .



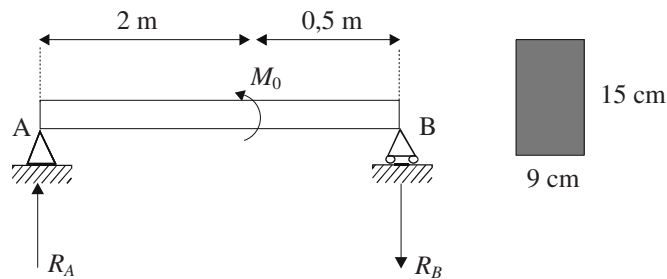
Fig. 8.20



Solució:

Les reaccions estan indicades a la figura 8.21

Fig. 8.21



Aplicant-hi les equacions d'equilibri

$$R_A = R_B$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_0 = R_B \cdot 250 \text{ cm}$$

d'on $R_B = \frac{M_0}{250 \text{ cm}}$ i $R_A = \frac{M_0}{250 \text{ cm}}$. Així, a tota la barra, l'esforç de cisallament té el mateix valor absolut $Q = \frac{M_0}{250 \text{ cm}}$.

Calculem la tensió de cisallament al centroide ja que és on és màxima per a una secció rectangular. Utilitzant la llei de Colignon,

$$\tau = \frac{QS_0^*}{I_z b_0}$$

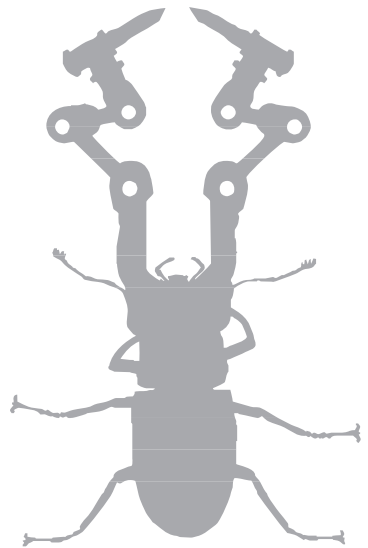
el moment estàtic S_0^* al centroide val

$$S_0^* = \int_0^{7.5} y 9 dy = 253,2 \text{ cm}^3$$

per tant,

$$\tau_{\max} = 80 \text{ N/cm}^2 = \frac{\frac{M_0}{250 \text{ cm}} \cdot 253,2 \text{ cm}^3}{\frac{1}{12} 9 \cdot 15^3 \text{ cm}^4 \cdot 9 \text{ cm}}$$

d'on $M_0 = 1.799.466,82 \text{ Ncm}$



Torsió

S'anomena *torsió* l'estat de sollicitació en el qual, a les seccions transversals, només hi ha un moment torsor aplicat. Deduirem primer les equacions per les tensions i els girs en el cas senzill de barres amb secció transversal circular, cas que d'altra banda, és important per ell mateix ja que hi han barres d'aquest tipus, per exemple, en eixos giratoris de màquines. Les equacions que deduirem les aplicarem en els problemes a situacions d'equilibri, que pot ser estàtic o dinàmic. L'equilibri estàtic es dona bàsicament en les estructures i el dinàmic es dona en eixos giratoris quan s'ha assolit un règim estacionari, és a dir, quan l'eix gira amb velocitat angular ω constant.

9.1. Barres de secció circular

Considerem una barra de secció circular de radi R , sotmesa a un moment torsor M_x , i prenem uns eixos globals X, Y, Z . Per simetria, podem suposar la hipòtesi de Navier: les seccions planes es mantenen planes després de la deformació. A la figura 9.1, es veu clar

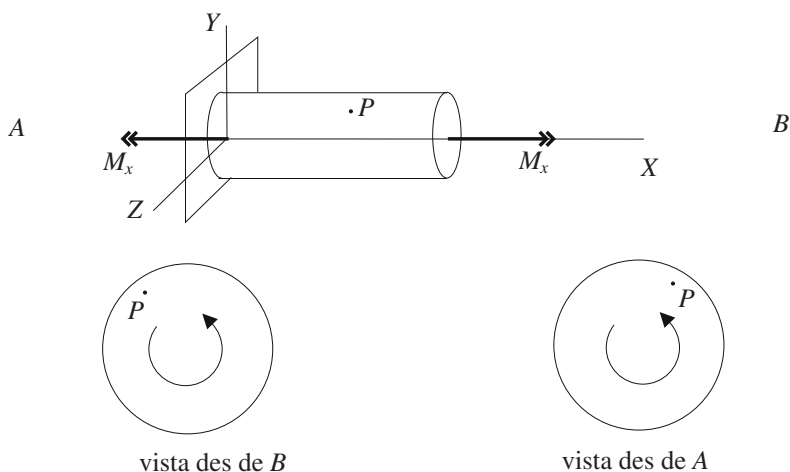


Fig. 9.1
Simetria en la torsió de
barres circulars.

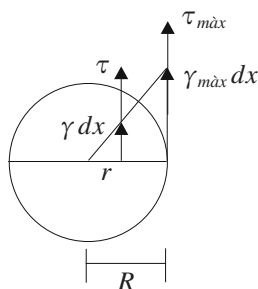
que si el punt P es desplaçés cap a la dreta, per exemple, llavors des de B veuríem que el punt s'acosta i, per simetria, tots els punts situats a la mateixa distància també s'haurien d'acostar. Mirat des de A també hauríem de veure que el punt P s'acosta, ja que tenim el mateix moment torsor i, com que els dos moviments no poden produir-se alhora, hem de concloure que la secció es manté plana.

Suposem també, d'acord amb les observacions experimentals, que les línies rectes radials es mantenen rectes després de la deformació. Aquesta suposició implica que les deformacions angulars γ varien linealment del centre a la perifèria (fig. 9.2 i fig. 9.3) i, per tant, podem escriure

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma_{\max}}{R}$$

essent r la distància al centre.

Fig. 9.2
Deformacions de
cisallament.



Si el material està dins el límit elàstic, la tensió de cisallament τ és proporcional a la deformació angular, de manera que $\tau = G\gamma$, on G és el mòdul de rigidesa; així

$$\frac{\tau}{r} = \frac{\tau_{\max}}{R}$$

El moment resultant de totes les tensions de cisallament respecte del centre de la secció ha de ser M_x , +@s a dir,

$$\int_A r\tau dA = M_x$$

i, substituint

$$\tau = \frac{M_x}{J_0} r \quad (9.1)$$

on J_0 és el moment polar d'inèrcia de la secció respecte del centroid. L'equació 9.1 ens permet calcular el tallant en un punt de la secció en funció de la distància al centre r . Com es pot veure, el tallant màxim es produeix en la perifèria de la secció. Per a eixos circulars massissos,

$$J_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

on d és el diàmetre de la secció. Per a eixos circulars buits,

$$J_0 = \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)$$

on d_e és el diàmetre exterior i d_i , l'interior. Per a tubs de paret prima, l'equació anterior es pot aproximar per

$$J_0 = \frac{\pi d^3 e}{4}$$

on d és el diàmetre i e el gruix del tub.

Si considerem un element de barra de gruix dx (fig. 9.3), es compleix $BB' = R d\theta = \gamma_{m\grave{a}x} dx$, on B' és la posició del punt B després del gir relatiu de la secció inferior respecte de la superior. Per tant, la variació de gir per unitat de longitud $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$ és

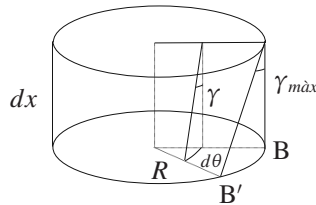


Fig. 9.3
Gir produït per la torsió.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\gamma_{m\grave{a}x}}{R}$$

Tenint en compte que $\tau = G\gamma$, tindrem

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_{m\grave{a}x}}{GR}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{J_0 G}$$

Integrant entre dos punts qualssevol 1 i 2 de l'eix de la barra,

$$\theta_2 - \theta_1 = \int_1^2 \frac{M_x}{J_0 G} dx$$

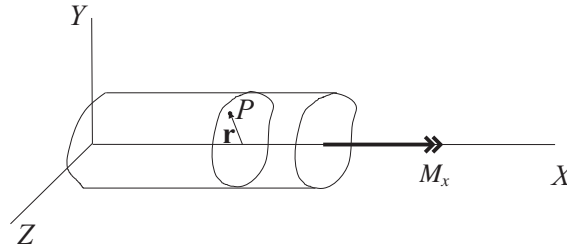
on θ_2 és el gir de la secció 2 i θ_1 , el gir de la secció 1. Observem, per exemple, que, si en una regió de l'eix no hi ha moment torsor, el gir de totes les seccions de la regió serà el mateix.

9.2. Barres de secció arbitrària

Considerem el cas d'una barra rectilínia subjecta per un extrem i amb un moment en la direcció de l'eix de la barra aplicat a l'altre extrem. En aquest cas, el moment torsor

present a les seccions transversals és el mateix a totes elles. Prenem com a origen de coordenades el centroide de la secció transversal situada més a l'esquerra. L'eix X en la direcció de la barra i els eixos Y, Z , seguint els eixos principals de la secció (fig. 9.4).

Fig. 9.4
Secció sotmesa a torsió.



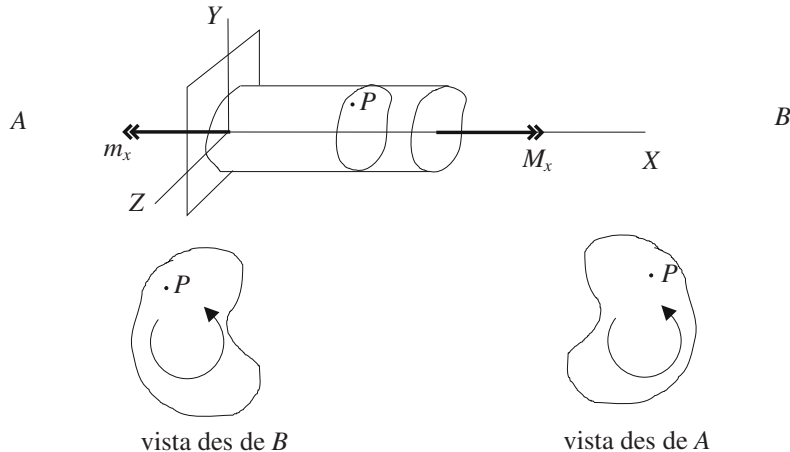
En el cas de l'eix d'una màquina, podem expressar el moment torsor M_x que actua en l'eix en funció de la potència P transmesa i la velocitat angular ω de gir de la forma següent:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M_x d\theta}{dt} = M_x \omega$$

on ω és la velocitat angular de gir de l'eix.

L'efecte del moment torsor M_x és fer girar les seccions transversals unes respecte de les altres al voltant de l'eix X , mantenint recta la línia de centroides i, a més, provocar un bombament de les seccions, que serà el mateix en totes elles, ja que l'esforç intern és el mateix.

Fig. 9.5
Situació per analitzar el compliment de la hipòtesi de Navier de seccions planes en presència de moments torsors.



En aquest cas, no hi ha cap motiu per suposar que les seccions transversals es mantenen planes; és una situació semblant a la que es produeix en el cas dels esforços de cisallament i que vàrem discutir al capítol anterior: a totes les seccions transversals hi haurà el mateix moment torsor; per tant, la deformació serà la mateixa per a totes elles, però, igual com passava amb els esforços de cisallament, no hi ha cap secció que, per simetria, puguem suposar que es manté plana. Si observem la figura 9.5, ens adonarem de la

situació. Si mirem la barra des de B i veiem que un punt P s'acosta cap a nosaltres, quan ens ho mirem des de A no podem dir que també s'ha d'acostar cap a nosaltres, ja que no tenim exactament una situació simètrica (a diferència del que passava en una tracció o compressió excèntrica i en una flexió). Per tant, no podem assegurar que la secció es manté plana.

El mòdul del vector de rotació unitària (que, en aquest cas, només té component en la direcció X) l'anomenem *angle de torsió* i el representarem per θ'

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx}$$

on θ és la rotació al voltant de l'eix X .

Per al càlcul de les components del desplaçament u , seguirem el procediment *semiinvers* de Saint-Venant, igual que vèrem fer per a l'esforç de cisallament. La hipòtesi que va fer Saint-Venant per trobar una solució al problema de la torsió d'una barra prismàtica de secció no circular, per analogia amb la barra de secció circular, és que, encara que les seccions es bombin, la projecció de la secció sobre el pla Y, Z gira com un sòlid rígid (fig. 9.4), és a dir, u_y i u_z vénen donades per

$$\theta' \mathbf{x} \mathbf{i} \times \mathbf{r}$$

on \mathbf{r} és el vector posició del punt respecte del centroide de la secció. És a dir,

$$\begin{aligned} u_y &= -\theta' xz \\ u_z &= \theta' xy \end{aligned}$$

La component x del desplaçament, que és la responsable del bombament, ha de ser zero per $\theta' = 0$ i, a més, no pot dependre de x , ja que el bombament és el mateix a totes les seccions; l'escriurem com

$$u_x = \theta' \psi(y, z)$$

on ψ és una certa funció de x i y que s'anomena *funció de torsió* o *funció de bombament de Saint-Venant*.

Si coneixem les components del desplaçament, podem calcular les components de la deformació i de la tensió. Atès que els desplaçaments són petits, podem aplicar 2.6; així tindrem, per a les deformacions,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{yy} = u_{zz} = u_{yz} = 0 \\ u_{zx} &= \frac{\theta'}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right), & u_{yx} &= \frac{\theta'}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \end{aligned} \quad (9.2)$$

i, per a les tensions,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zx} &= 2Gu_{zx} = G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right), & \sigma_{yx} &= 2Gu_{yx} = G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \end{aligned} \quad (9.3)$$



Fixem-nos que $u_{ll} = 0$, és a dir, la traça del tensor de deformacions és zero; per tant, la variació de volum és zero; *la torsió és una deformació de cisallament pur*.

Essent σ_{zx} i σ_{yx} les úniques components del tensor de tensions no nul·les, les equacions d'equilibri $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$ es redueixen a

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

Substituint σ_{zx} i σ_{yx} , obtenim

$$\Delta \psi = 0 \quad (9.4)$$

on Δ és l'operador de Laplace, és a dir, la funció ψ ha de ser harmònica.

És còmode utilitzar una altra funció auxiliar $\chi(y, z)$, definida per

$$\sigma_{yx} = 2G\theta' \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \sigma_{zx} = -2G\theta' \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (9.5)$$

La utilitat d'aquesta funció és que permet escriure de manera senzilla les condicions de contorn a la superfície de la barra, com veurem de seguida.

Substituint 9.5 a 9.3, obtenim

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial z} + z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -2 \frac{\partial \chi}{\partial y} - y$$

Derivant la primera igualtat respecte de z , la segona respecte de y i restant, obtenim

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -1$$

que escriurem com

$$\Delta \chi = -1 \quad (9.6)$$

Per trobar les condicions de contorn, imposem que, sobre la superfície de la barra, les forces han de ser zero, és a dir,

$$0 = \sigma_{ik} n_k$$

que, tenint en compte 9.5, es transforma en

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} n_y - \frac{\partial \chi}{\partial y} n_z = 0$$

Posant $n_y = \frac{-dz}{dl}$ i $n_z = \frac{dy}{dl}$, on z, y són les coordenades dels punts del contorn i dl és l'element d'arc (fig. 9.6), s'obté

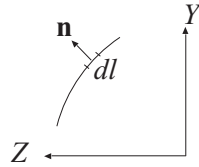


Fig. 9.6
Contorn de la secció
transversal.

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} dz + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = d\chi = 0$$

és a dir, que en el contorn χ pren un valor constant. Com que, en la definició de χ , només hi intervenen les seves derivades, és clar que podem afegir una constant qualsevol al seu valor. Si el contorn és únic (secció sense forats), podem prendre com a condició de contorn

$$\chi = 0$$

Si la secció té forats, χ prendrà diferents valors sobre cadascun dels contorns interns; pot ser zero en algun d'ells, però no a tots.

La determinació de les tensions i deformacions quedarà, doncs, ben establerta resolent 9.6 amb les condicions de contorn adequades. El problema és que no hi ha una solució analítica de 9.6 vàlida per a qualsevol perfil; sí que es pot resoldre, en canvi, l'equació per mètodes numèrics. En veurem la solució analítica per a seccions circulars al final del capítol.

Resta, però, per determinar el mòdul del vector de rotació unitària, és a dir, l'angle de torsió θ' , tot relacionant-lo amb el moment torsor aplicat a la barra, és a dir, resta per establir l'equació constitutiva de les seccions. En l'estudi de la flexió, això ho varem fer partint de la hipòtesi que les seccions transversals es mantenen planes; en aquest cas, això no és cert. Per tant hem d'utilitzar un altre procediment; ho farem per consideracions energètiques.

Suposem que tenim la barra en equilibri sota l'acció d'un moment torsor M_x a l'extrem dret. Si permetem una petita rotació $\delta\theta_l$ en el punt on està aplicat el moment, el treball fet per aquest ha de ser igual a la variació d'energia interna que es produeixi a la barra. El treball que fa el moment en aquesta petita rotació és

$$M_x \delta\theta_l \quad (9.7)$$

Pel que fa a l'energia interna, a la secció 13.2 del capítol 13, deduirem una expressió per a l'energia interna U d'una barra sotmesa a torsió en la forma

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \theta' C \theta' dx = \frac{1}{2} \int_0^l C \theta'^2 dx \quad (9.8)$$

on l és la longitud de la barra i C , que és l'anomenada *rigidesa de la barra a la torsió*, està definida per

$$C \equiv 4G \int_A (\Delta\chi)^2 dA$$



on A és la superfície de la secció transversal de la barra. Podem deduir una expressió una mica més simple per a C . Tenint en compte 9.6, escriurem

$$(\Delta\chi)^2 = \Delta(\chi\Delta\chi) + \chi$$

i, transformant la integral del primer terme en integral sobre el contorn de la secció de la barra, tindrem

$$C = 4G \oint \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} dl + 4G \int_A \chi dA$$

si el contorn no té forats, $\chi = 0$ sobre ell, com ja hem dit; per tant,

$$C = 4G \int_A \chi dydz \quad (9.9)$$

que és l'expressió que utilitzarem per determinar C en el cas de les seccions circulars que s'analitza més avall.

Variant 9.8 respecte a l'angle θ i tenint en compte que $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$, obtenim

$$\delta \frac{1}{2} \int_A C \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l C \frac{d\theta}{dx} \frac{d\delta\theta}{dx} dx$$

Integrant per parts, obtenim

$$- \int_0^l C \frac{d\theta'}{dx} \delta\theta dx + C\theta' \delta\theta$$

en què l'últim terme pren la diferència de valors entre els límits d'integració. Com que l'extrem esquerre el suposem encastat, podem escriure

$$- \int_0^l C \frac{d\theta'}{dx} \delta\theta dx + C\theta' \delta\theta_l \quad (9.10)$$

Així doncs, apliquem el teorema de l'energia igualant 9.7 a 9.10 i n'obtenim

$$\int_0^l C \frac{d\theta'}{dx} \delta\theta dx + (M_x - C\theta') \delta\theta_l = 0$$

Com que la variació $\delta\theta_l$ és arbitrària, necessàriament $M_x - C\theta' = 0$, és a dir,

$$\theta' = \frac{M_x}{C} \quad (9.11)$$

que és l'equació constitutiva que buscàvem.

Apliquem les equacions anteriors al cas que hem analitzat a la secció anterior de barres de secció circular. Considerem una barra de secció circular de radi R . Tenint en compte la simetria radial, 9.6 es pot escriure com



$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) = -1$$

on r és la distància d'un punt qualsevol de la secció al centre. Integrant

$$\chi = -\frac{r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2$$

c_1 ha de ser zero, ja que χ ha de prendre un valor finit al centre de la secció. Per trobar c_2 , impossem que χ ha de ser zero al contorn, és a dir,

$$0 = -\frac{R^2}{4} + c_2$$

d'on $c_2 = \frac{R^2}{4}$. Tenim, doncs, per χ

$$\chi = \frac{1}{4} (R^2 - r^2)$$

La rigidesa C valdrà

$$C = 4G \int_A \frac{1}{4} (R^2 - r^2) dA = 2\pi G \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = G \frac{\pi R^4}{2}$$

i, tenint en compte que $\frac{\pi R^4}{2}$ és el moment polar d'inèrcia de la secció respecte del centre, designant-lo per J_0 escriurem

$$C = GJ_0$$

Les tensions valdran

$$\sigma_{yx} = -G\theta'z, \quad \sigma_{zx} = G\theta'y$$

i la tensió resultant de cisallament $\tau = \sqrt{\sigma_{yx}^2 + \sigma_{zx}^2}$ en un punt de la secció situat a distància r del centre valdrà

$$\tau = G\theta'r = G \frac{M_x r}{C} = \frac{M_x}{J_0} r \quad (9.12)$$

que coincideix amb l'equació 9.1 obtinguda a la secció anterior.

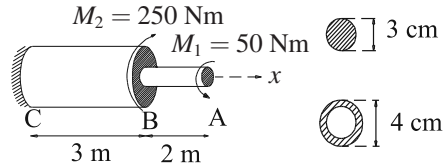
9.3. Problemes

Problema 9.1

L'eix que es mostra a la figura 9.7 se sotmet als moments torsors de $M_1 = 50$ Nm i $M_2 = 250$ Nm. Trobeu les tensions de cisallament màximes a les regions CB i BA. Trobeu també el gir de la secció A. $G = 85$ GPa.



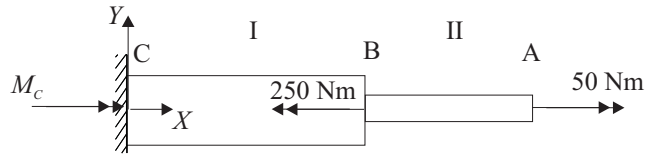
Fig. 9.7



Solució:

La reacció a la paret i les regions que s'han d'analitzar estan representades a la figura 9.8

Fig. 9.8



Aplicant l'estàtica a la barra, n'obtenim

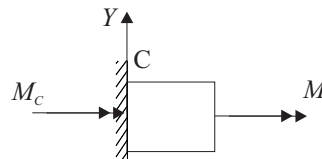
$$M_C + 50 \text{ Nm} = 250 \text{ Nm}$$

d'on

$$M_C = 200 \text{ Nm}$$

Calculem l'esforç de torsió dins de cadascuna de les regions fent-hi un tall. Per a la regió I (fig. 9.9),

Fig. 9.9



$$M = -200 \text{ Nm} \quad \leftarrow \boxed{\quad} \rightarrow$$

així, la tensió de cisallament màxima en una secció qualsevol d'aquesta regió és, en valor absolut,

$$\tau_{m\grave{a}x} = \frac{M}{J_0} R = \frac{20.000 \text{ Ncm}}{\frac{\pi}{32} (4^4 - 3^4) \text{ cm}^4} 1,5 \text{ cm} = 1.746,21 \text{ N/cm}^2$$

Per a la regió II (fig. 9.10),

Fig. 9.10



$$M = 50 \text{ Nm} \quad \leftarrow \boxed{\quad} \rightarrow$$

Així, la tensió de cisallament màxima en una secció qualsevol d'aquesta regió és, en valor absolut,

$$\tau_{\max} = \frac{M}{J_0} R = \frac{5.000 \text{ Ncm}}{\frac{\pi}{32} 3^4 \text{ cm}^4} 1,5 \text{ cm} = 943,15 \text{ N/cm}^2$$

L'angle girat per a la secció A és

$$\Phi_A - \Phi_C = \Phi_A = \int_0^{300} \frac{M_I}{J_0' G_I} dx + \int_0^{200} \frac{M_{II}}{J_0'' G_{II}} dx$$

i, substituint dades

$$\Phi_A = \frac{-20.000}{\frac{\pi}{32} (4^4 - 3^4) \cdot 85 \cdot 10^5} 300 + \frac{5.000}{\frac{\pi}{32} 3^4 \cdot 85 \cdot 10^5} 200 = -0,02 \text{ rad} = -1,5^\circ$$

que, atès que ha sortit negatiu, és un gir en sentit horari vist des de fora, o sigui desde la dreta de la secció A.

Problema 9.2

Calculeu el gir de la secció B de la barra de la figura 9.11.

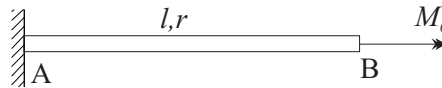


Fig. 9.11

Solució:

L'equació que dóna la diferència de gir per torsió entre dues seccions A i B és

$$\Phi_B - \Phi_A = \int_A^B \frac{M_x}{J_0 G} dx$$

Aplicant l'equació entre els punts A i B de la barra i tenint en compte que $\Phi_A = 0$

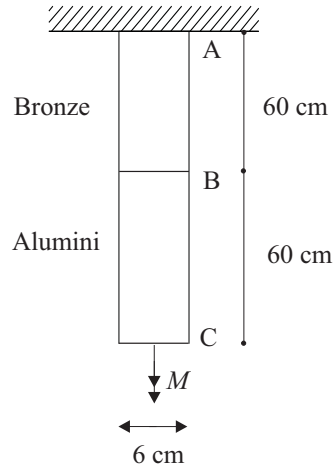
$$\Phi_B = \int_0^l \frac{M_0}{\pi r^4 / 2 \cdot G} dx = \frac{2 M_0 l}{\pi r^4 G}$$

Problema 9.3

Un arbre compost consta d'una barra de bronze, unida fortament a una altra d'alumini, tal s'indica a la figura 9.12. El tallant màxim que suporta el bronze és 105 MPa i l'alumini 155 MPa, i s'ha d'aplicar un coeficient de seguretat 2 a cada cas. Si el gir a l'extrem inferior no ha de sobrepassar 1° , quin és el màxim moment torsor que pot suportar l'arbre? Per al bronze, $G = 35 \text{ GPa}$ i, per a l'alumini, $G = 28 \text{ GPa}$.



Fig. 9.12



Solució:

El moment torsor és el mateix a totes les seccions, tant a la barra de dalt com a la de baix, i és igual al moment M aplicat a l'extrem inferior. Tenint en compte el factor de seguretat, els valors màxims permesos són

$$\sigma_{m\grave{a}x}^{bronze} = 105/2 = 52,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{m\grave{a}x}^{alumini} = 155/2 = 77,5 \text{ MPa}$$

En aquest problema, tenim tres condicions que s'han de complir: que la tensió de cisallament al bronze no superi els 52,5 MPa, que la tensió de cisallament a l'alumini no superi els 77,5 MPa i que l'angle girat per la secció C no superi 1° . Són tres condicions independents i que no tenen perquè complir-se simultàniament. Imposarem cadascuna d'elles per separat i, dels diferents valors de M que n'obtinguem, triarem el més petit com a moment màxim que podem aplicar.

La tensió de cisallament màxima en una secció de radi r en la qual hi ha un moment torsor M_x és

$$\tau = \frac{M_x}{J_0} r$$

essent J_0 el moment polar d'inèrcia de la secció. Comencem suposant que es compleix la primera condició, és a dir, que en el bronze la tensió de cisallament val 52,5 MPa. Tindrem

$$52,5 \cdot 10^2 \text{ N/cm}^2 = \frac{M_x}{\frac{\pi}{32} 6^4 \text{ cm}^4} 3 \text{ cm}$$

d'on

$$M_x = 222.660,3 \text{ Ncm}$$

Suposem ara que es compleix la segona condició, és a dir, que en l'alumini la tensió de cisallament val 77,5 MPa. Tindrem

$$77,5 \cdot 10^2 \text{ N/cm}^2 = \frac{M_x}{\frac{\pi}{32} 6^4 \text{ cm}^4} 3 \text{ cm}$$

d'on

$$M_x = 328.680 \text{ Ncm}$$

Imposem ara la tercera condició; que el gir de la secció C és 1° (0,0174rad). El gir de secció C és

$$\Phi_C = \int_A^B \frac{M_x}{J_0 G_{AB}} dx + \int_B^C \frac{M_x}{J_0 G_{BC}} dx$$

Substituint dades i tenint en compte que $M_x = M$ en totes les seccions de les dues barres,

$$0,0174 \text{ rad} = \frac{M}{\frac{\pi}{32} 6^4 \text{ cm}^4 \cdot 35 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2} 60 \text{ cm} + \frac{M}{\frac{\pi}{32} 6^4 \text{ cm}^4 \cdot 28 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2} 60 \text{ cm}$$

d'on

$$M_x = 57.600 \text{ Ncm}$$

Així, el moment flector màxim que podem aplicar és el més petit de tots tres, $M_x = 57.600 \text{ Ncm}$.

Problema 9.4

Dimensioneu l'eix de la figura 9.13 sabent que les politges A i C són motrius de potències 3 i 6 CV, respectivament, i que les B i D accionen, mitjançant corretges, un torn i una fresadora de potències 4 i 5 CV, respectivament. La velocitat angular de l'eix és 200 r.p.m. i la tensió de cisallament màxima admissible és de 70 MPa.

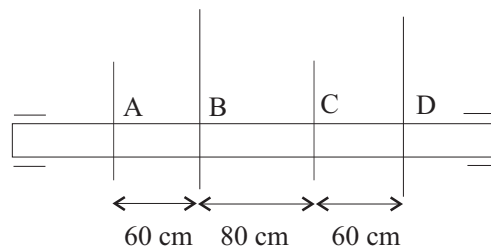


Fig. 9.13

Solució:

Primer calculem els moments torsors corresponents a cadascuna de les potències, tant motrius com resistents.



$$\omega = 200 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 20,94 \text{ rad/s}$$

$$M_A = \frac{P_A}{\omega} = \frac{3 \cdot 735 \text{ W}}{20,94 \text{ rad/s}} = 105,3 \text{ Nm}$$

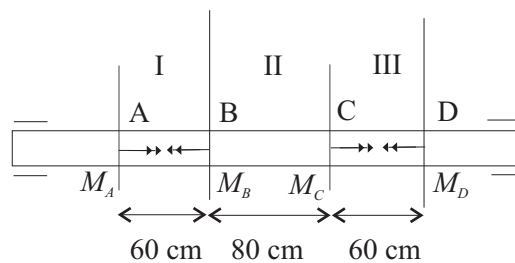
$$M_B = \frac{P_B}{\omega} = \frac{4 \cdot 735 \text{ W}}{20,94 \text{ rad/s}} = 140,4 \text{ Nm}$$

$$M_C = \frac{P_C}{\omega} = \frac{6 \cdot 735 \text{ W}}{20,94 \text{ rad/s}} = 210,6 \text{ Nm}$$

$$M_D = \frac{P_D}{\omega} = \frac{5 \cdot 735 \text{ W}}{20,94 \text{ rad/s}} = 175,5 \text{ Nm}$$

Per tant, dibuixant aquests moments sobre la barra, tindrem la situació que se representa a la figura 9.14.

Fig. 9.14

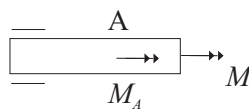


Per analitzar els esforços interns a la barra, l'hem de dividir en tres regions: I, II i III. Calculem l'esforç de torsió dins de cadascuna d'elles fent-hi un tall

Regió I (fig. 9.15)

$$M = -M_A = -105,3 \text{ Nm}$$

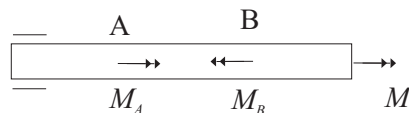
Fig. 9.15



Regió II (fig. 9.16)

$$M = M_B - M_A = 35,08 \text{ Nm}$$

Fig. 9.16



Regió III (fig. 9.17)

$$M = M_B - M_A - M_C = -175,5 \text{ Nm}$$

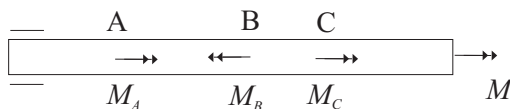


Fig. 9.17

Per tant, les seccions més perilloses són les situades dins la regió III, és a dir, entre C i D. Igualement la tensió de cisallament màxima dins de la secció, que es produeix a la perifèria, al màxim permès per al material, i n'obtidrem el diàmetre mínim requerit.

$$\tau_{\max} = \frac{M}{J_0} r$$

$$700 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = \frac{175,5 \text{ Nm } d}{\frac{\pi d^4}{32} \frac{d}{2}}$$

$$d = 0,023 \text{ m} \quad \spadesuit$$

Problema 9.5

La barra massissa de la figura 9.18 és de secció circular. Al punt C, s'hi ha aplica un moment torsor tal com s'indica. Determineu-ne les reaccions externes i el gir de la secció C.

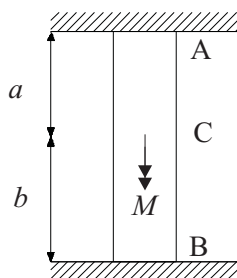


Fig. 9.18

Solució:

Les reaccions les tenim representades a la figura 9.19.

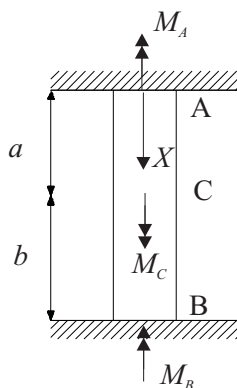


Fig. 9.19



L'equació d'equilibri de moments aplicada a la barra és

$$M_A + M_B = M_C \quad (9.13)$$

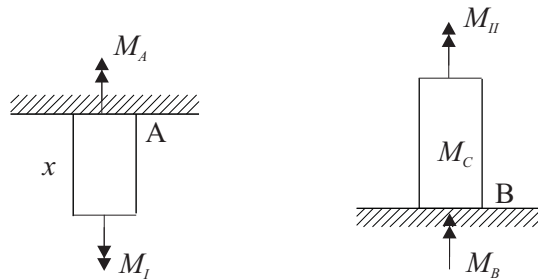
Anomenant regió I la que va de A a C i regió II la que va de C a B, l'equació que ens dóna la diferència de gir entre els punts A i B és

$$\Phi_B - \Phi_A = \int_0^a \frac{M_I}{J_0 G} dx + \int_a^{a+b} \frac{M_{II}}{J_0 G} dx$$

Tenint en compte que $\Phi_B = \Phi_A = 0$, perquè són encastaments, i $M_I = M_A$ (fig. 9.20), i $M_{II} = -M_B$ (fig. 9.21) (observeu que hem dibuixat els moments torsors a la secció de tall sempre positius, seguint l'eix X),

Fig. 9.20

Fig. 9.21



$$0 = \int_0^a \frac{M_A}{J_0 G} dx + \int_a^{a+b} \frac{-M_B}{J_0 G} dx$$

$$\frac{M_A}{J_0 G} a - \frac{M_B}{J_0 G} b = 0 \quad (9.14)$$

Resolent (9.13) i (9.14),

$$M_A = M_C \frac{b}{a+b}; \quad M_B = M_C \frac{a}{a+b}$$

Una vegada tenim les reaccions, podem calcular el gir de la secció C tornant a aplicar l'equació dels girs entre A i C,

$$\Phi_C - \Phi_A = \int_0^a \frac{M_I}{J_0 G} dx = \int_0^a \frac{M_A}{J_0 G} dx = \int_0^a \frac{M_C \frac{b}{a+b}}{J_0 G} dx$$

Tenint en compte que $\Phi_A = 0$,

$$\Phi_C = \frac{M_C \frac{b}{a+b}}{J_0 G} a = \frac{M_C \frac{ab}{a+b}}{J_0 G}$$

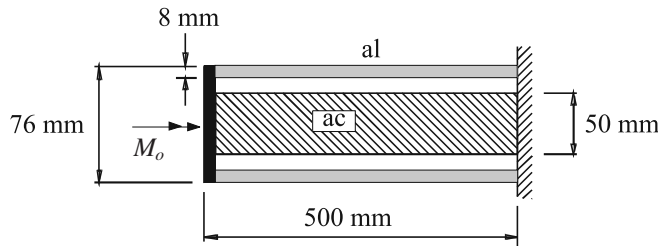
que, en donar positiu, és un gir antihorari, vista la secció C des de sota, és a dir, a favor de l'eix X a la figura 9.20. Observem que, per calcular Φ_C , podríem haver aplicat l'equació

dels girs de B a C; llavors ens hauria sortit un valor negatiu per a Φ_C , ja que $M_{II} = -M_B$; això voldria dir un gir horari, vista la secció C des de A, en contra de l'eix X de la figura 9.21.

Problema 9.6

Es connecten un arbre d'acer i un tub d'alumini a un suport fix i a un disc rígid, com es mostra en el tall longitudinal (fig. 9.22). Sabent que els esforços inicials són zero, determineu el moment màxim de torsió M_o que pot aplicar-se al disc si els esforços admissibles són 120 MPa per a l'acer i 70 MPa per a l'alumini. $G = 80$ GPa per a l'acer i $G = 27$ GPa per a l'alumini.

Fig. 9.22



Solució:

En aplicar un moment M_o sobre la placa indeformable, apareixeran sobre els dos materials moments torsors M_{al} i M_{ac} , respectivament (fig. 9.23). Tenim, doncs, tres incògnites: M_o , M_{al} , M_{ac} ; necessitem tres equacions per calcular-les. La primera serà l'equació de l'estàtica aplicada al tros obtingut de fer el tall transversal de la peça

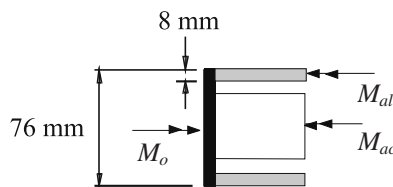


Fig. 9.23

$$M_o = M_{al} + M_{ac} \quad (9.15)$$

La segona equació la podem obtenir igualant el gir de cada un dels materials a la secció extrema, ja que estan subjectats sòlidament.

$$\frac{M_{al}l}{J_0^{al}G_{al}} = \frac{M_{ac}l}{J_0^{ac}G_{ac}} \quad (9.16)$$

i la tercera l'obtenim imposant o bé que amb l'acer s'arriba a la tensió de cisallament màxima permesa o bé que això passa amb l'alumini (no podem imposar les dues condicions simultàniament).

$$\tau_{al}^{max} = \frac{M_{al}l}{J_0^{al}} r_{al}^{exterior} \quad (9.17)$$

$$\tau_{ac}^{m\grave{a}x} = \frac{M_{ac} l}{J_0^{ac}} r_{ac}^{exterior} \quad (9.18)$$

Substituint dades i resolent (9.15), (9.16) i (9.17), obtenim

$$M_{al} = 3.690 \text{ Nm} \quad M_{acer} = 3.350 \text{ Nm} \quad M_0 = 7.040 \text{ Nm}$$

Substituint dades i resolent (9.15), (9.16) i (9.18), obtenim

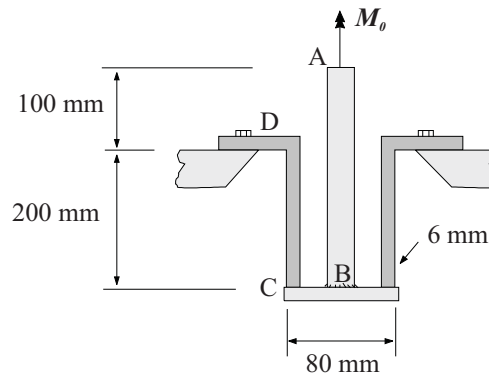
$$M_{al} = 3.248,8 \text{ Nm} \quad M_{acer} = 2.950 \text{ Nm} \quad M_0 = 6.198,8 \text{ Nm}$$

Per tant, el moment màxim que podem aplicar perquè es compleixin les dues condicions establertes és $M_0 = 6.198,8 \text{ Nm}$

Problema 9.7

La camisa CD, de diàmetre exterior de 80 mm i gruix de paret de 6 mm, és de llautó, per al qual la tensió de cisallament màxima admissible és 40 MPa (fig. 9.24). La barra massissa AB té un diàmetre de 56 mm i és d'acer amb tensió de cisallament màxima admissible de 55 MPa. Trobeu el moment torsor màxim M_0 que s'hi pot aplicar.

Fig. 9.24



Solució:

Observem, en primer lloc, que el moment torsor que apareix a la barra d'acer és el mateix que el moment extern aplicat M_0 (figura 9.25), $M_{acer} = M_0$. El tallant màxim a l'acer és

$$\tau_{acer}^{m\grave{a}x} = \frac{M_{acer}}{J_0^{acer}} r_{acer}$$

Fig. 9.25



substituint dades

$$55 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = \frac{M_{acer}}{\frac{\pi}{32} (56 \cdot 10^6)^4 \text{ m}^4} 28 \cdot 10^3 \text{ m}$$

d'on

$$M_{acer} = M_0 = 1.896,5 \text{ Nm}$$

Pel que fa al llautó, observant la figura 9.26 veiem que $M_{\text{llautó}} = -M_0$. El tallant màxim al llautó és

$$\tau_{\text{llautó}}^{\text{màx}} = \frac{M_{\text{llautó}}}{J_0^{\text{llautó}}} r_{\text{llautó}}$$

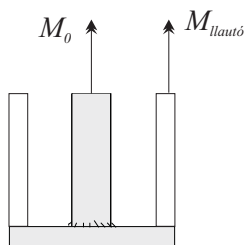


Fig. 9.26

Substituint dades

$$-40 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = \frac{M_{\text{llautó}}}{\frac{\pi}{32} (0,08^4 - 0,068^4) \text{ m}^4} 0,04 \text{ m}$$

d'on

$$-M_{\text{llautó}} = M_0 = 1.922 \text{ Nm}$$

El moment M_0 més gran que hi podem aplicar sense que s'incompleixi cap de les dues condicions és, doncs, 1.896,5 Nm

→10



Problemes d'esforços combinats

Quan, sobre la secció transversal actuen presents diversos esforços alhora, es pot aplicar el principi de superposició per calcular la tensió resultant com la suma de les tensions provocades per cada un dels esforços per separat. Així, recordem que, dels sis esforços possibles en el cas tridimensional, l'esforç normal N i els moments flectors M_y, M_z provoquen tensions normals σ i els esforços de cisallament Q_y, Q_z i el moment torsor M_x provoquen tensions de cisallament τ .

$$N, M_y, M_z \rightarrow \sigma \quad Q_y, Q_z, M_x \rightarrow \tau$$

Com que σ i τ són tensions que actuen en plans perpendiculars, les calculem de manera independent. La σ resultant vindrà donada, doncs, per

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{-M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

i la τ , per

$$\vec{\tau} = \frac{Q_y S_{0y}^*}{I_z b_{0y}} \mathbf{j} + \frac{Q_z S_{0z}^*}{I_y b_{0z}} \mathbf{k} - \frac{M_x}{J_0} z \mathbf{j} + \frac{M_x}{J_0} y \mathbf{k}$$

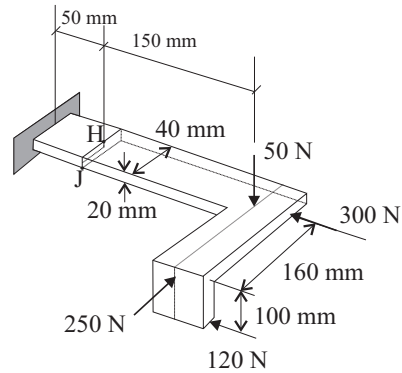
Disseminem per X, Y, Z els eixos locals en les seccions transversals. Quan sigui necessari, definirem un eixos globals i els designarem per $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Els eixos globals ens serviran per identificar la secció transversal al llarg de la barra i els eixos locals, per identificar els diferents punts de la secció transversal.

Problema 10.1

Calculeu les tensions normal i de cisallament als punts H i J de la peça de la figura 10.1.

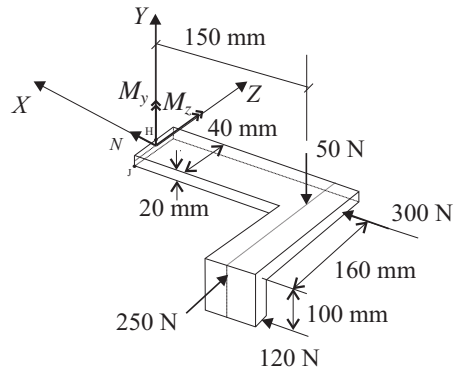


Fig. 10.1



Solució:

Fig. 10.2



Fem un tall a la secció transversal que conté els punts H i J (fig. 10.2). Aplicant l'estàtica al tros tallat, tindrem

$$N + 300 + 120 = 0 \Rightarrow N = -420 \text{ N}$$

$$Q_y = 50 \text{ N}$$

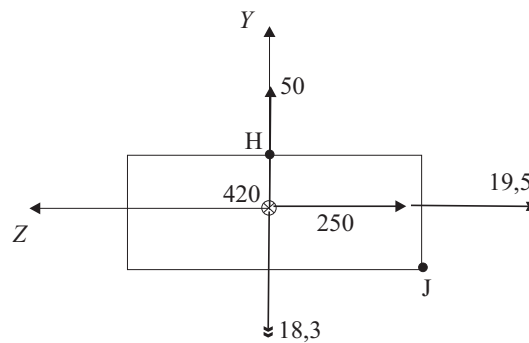
$$Q_z + 250 = 0 \Rightarrow Q_z = -250 \text{ N}$$

$$M_y + 250 \cdot 0,15 = 120 \cdot 0,16 \Rightarrow M_y = -18,3 \text{ Nm}$$

$$M_z + 50 \cdot 0,15 + 120 \cdot 0,1 = 0 \Rightarrow M_z = -19,5 \text{ Nm}$$

Així doncs, la situació que tenim a la secció que passa per H i J és la de la figura 10.3

Fig. 10.3





Les tensions normals en els punts H i J són

$$\sigma_H = \frac{-420 \text{ N}}{0,04 \cdot 0,02 \text{ m}^2} - \frac{-19,5 \text{ Nm}}{\frac{1}{12} 0,04 \cdot 0,02^3 \text{ m}^4} 0,01 \text{ m} = 6,7 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_J &= \frac{-420 \text{ N}}{0,04 \cdot 0,02 \text{ m}^2} - \frac{-19,5 \text{ Nm}}{\frac{1}{12} 0,04 \cdot 0,02^3 \text{ m}^4} (-0,01 \text{ m}) + \frac{-18,3 \text{ Nm}}{\frac{1}{12} 0,02 \cdot 0,04^3 \text{ m}^4} (-0,02 \text{ m}) \\ &= -4,4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Les tensions de cisallament són produïdes pels dos esforços de cisallament presents a la secció

$$\begin{aligned} \tau_H &= \tau_H^{250} = \frac{3}{2} \frac{250}{0,04 \cdot 0,02} = 0,46 \text{ MPa} \\ \tau_J &= 0 \end{aligned}$$

Problema 10.2

Sabent que el radi de la barra és de 20 mm, calculeu la tensió normal en els punts M i N de la figura 10.4.

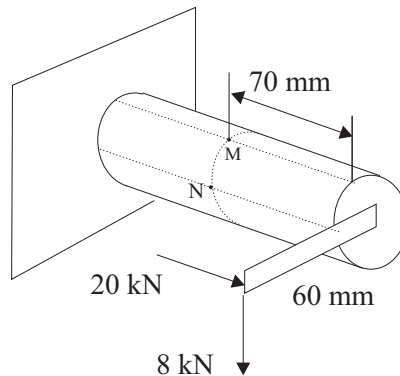


Fig. 10.4

Solució:

Tallem per la secció on hi ha els punts M i N i n'aïllem la part de la dreta (fig. 10.5); per tant, no ens caldrà calcular les reaccions externes. A la secció transversal, només hem dibuixat els esforços que provoquen tensions normals, és a dir, N , M_z , M_y ; no hi hem dibuixat ni el moment torsor ni el cisallament, que provoquen tensions de cisallament.

Aplicant-hi les equacions d'equilibri,

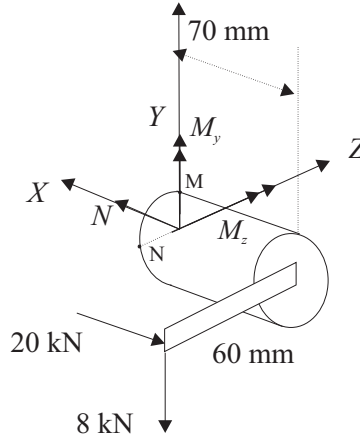
$$\sum M_z = 0 \rightarrow M_z + 8 \text{ kN} \cdot 70 \text{ mm} = 0 \rightarrow M_z = -560 \text{ kNmm}$$



$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_y + 20 \text{ kN} \cdot 60 \text{ mm} = 0 \rightarrow M_y = -1.200 \text{ kNmm}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N = 20 \text{ kN}$$

Fig. 10.5



La tensió normal en un punt de coordenades z, y de la secció transversal és

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

L'àrea de la secció és

$$A = \pi \cdot 20^2 \text{ mm}^2 = 1.256,6 \text{ mm}^2$$

El moment d'inèrcia de la secció és

$$I_z = I_y = \pi \cdot 20^4 / 4 = 125.663,7 \text{ mm}^4$$

Així, substituint els moments flectors i les coordenades dels punts

$$\sigma_M = \frac{20 \text{ kN}}{1.256,6 \text{ mm}^2} - \frac{-560 \text{ kNmm}}{125.663,7 \text{ mm}^4} 20 \text{ mm} + \frac{-1.200 \text{ kNmm}}{125.663,7 \text{ mm}^4} 0 = 0,1 \text{ kN/mm}^2$$

i en el punt K

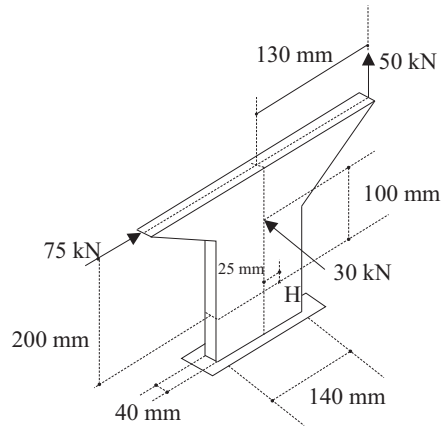
$$\sigma_N = \frac{20 \text{ kN}}{1.256,6 \text{ mm}^2} - \frac{-560 \text{ kNmm}}{125.663,7 \text{ mm}^4} 0 + \frac{-1.200 \text{ kNmm}}{125.663,7 \text{ mm}^4} (-20 \text{ mm}) = 0,2 \text{ kN/mm}^2$$



Problema 10.3

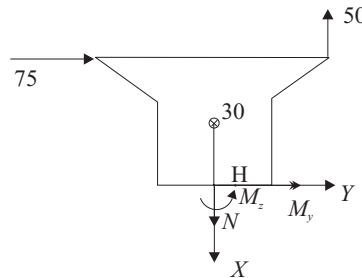
Trobeu les tensions normals i de cisallament al punt H de la figura 10.6.

Fig. 10.6



La secció transversal que conté el punt H és un rectangle de 40×140 mm. L'àrea és $A = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Els moments d'inèrcia són $I_z = 9,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, $I_y = 0,747 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$. Fent un tall a la secció transversal que passa per H i aïllant la part superior, les equacions d'equilibri són, figura 10.7

Fig. 10.7



$$N = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z + 50 \text{ kN} \cdot 0,13 \text{ m} = 75 \text{ kN} \cdot 0,2 \text{ m} \Rightarrow M_z = 8,5 \text{ kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = 30 \text{ kN} \cdot 0,1 \text{ m} = 3 \text{ kNm}$$

així, la tensió normal en el punt H serà, substituint a l'expressió

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_H = \frac{50 \text{ kN}}{5,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} - \frac{8,5 \text{ kNm}}{9,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} 0,025 \text{ m} + \frac{3 \text{ kNm}}{0,747 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} 0,02 \text{ m}$$

$$\sigma_H = 66000 \text{ kN/m}^2 = 66 \text{ MPa}$$

La tensió de cisallament en el punt H és deguda únicament a la força de 75 kN ja que la força de cisallament de 30 kN no provoca tensió en el punt H en quedar aquest en la fibra extrema (des del punt de vista d'aquesta força). La calculem aplicant la llei de Colignon

$$\tau = \frac{QS_0^*}{I_c b_0}$$

El moment estàtic val

$$S_0^* = \int_{0,025}^{0,07} y 0,04 dy = 85,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

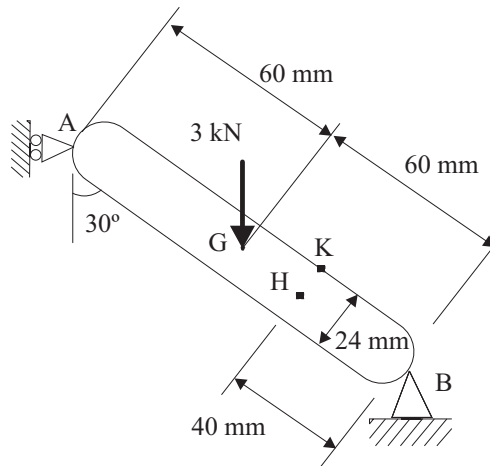
així

$$\tau_H = \frac{75 \text{ kN} \cdot 85,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{9,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 0,04 \text{ m}} = 17,52 \text{ MPa}$$

Problema 10.4

Trobeu les tensions normal i de cisallament als punts H i K, que són a la cara exterior de la barra de la figura 10.8. La secció transversal és rectangular de $10 \times 24 \text{ mm}$.

Fig. 10.8



Solució:

Les reaccions que apareixen estan indicades a la figura 10.9. Aplicant l'estàtica al conjunt,

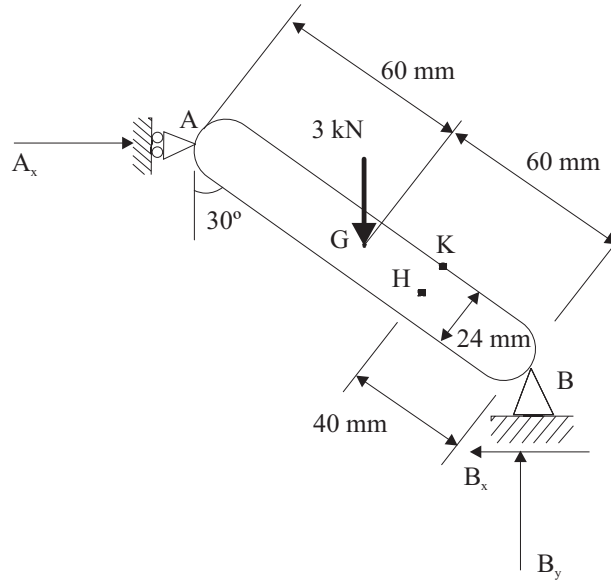
$$A_x = B_x$$

$$B_y = 3 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 3 \cdot 60 \sin 30 + B_x 120 \cos 30 = 3 \cdot 120 \sin 30$$



Fig. 10.9

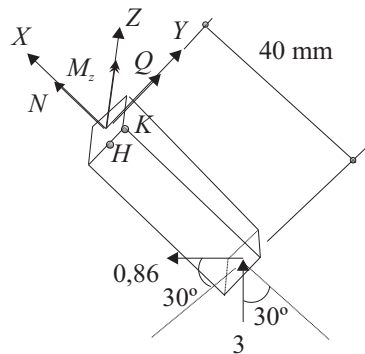


d'on

$$B_x = 0,86 \text{ kN} \quad A_x = 0,86 \text{ kN}$$

Fent un tall a la secció transversal de la peça que passa pels punts H i K (fig. 10.10) i aplicant l'estàtica, n'obtenim els esforços que hi ha a la secció

Fig. 10.10



$$3 \cos 30 + 0,86 \sin 30 + N = 0 \quad N = -3,028 \text{ kN}$$

$$M_z + 0,86 \cos 30 \cdot 40 = 3 \sin 30 \cdot 40 \quad M_z = 30,2 \text{ kNmm}$$

Substituint a l'equació general dels esforços combinats,

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

tindrem als punts H i K

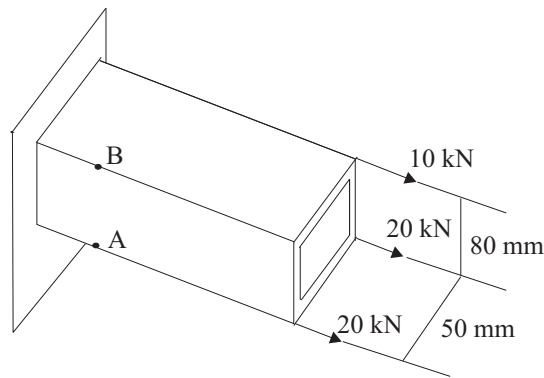
$$\sigma_H = \frac{-3,028}{24 \cdot 10} - \frac{30,2}{1/12 \cdot 10 \cdot 24^3} 0 = -0,012 \text{ kN/mm}^2 = -12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_K = \frac{-3,028}{24 \cdot 10} - \frac{30,2}{1/12 \cdot 10 \cdot 24^3} 12 = -0,043 \text{ kN/mm}^2 = -43 \text{ MPa}$$

Problema 10.5

El tub que es mostra a la figura 10.11 té un gruix de paret de 10 mm. Per les càrregues donades, calculeu-ne la tensió normal als punts A i B. Dibuixeu la línia neutra de la secció que passa per A i B.

Fig. 10.11



Solució:

L'àrea de la secció és

$$A = 50 \cdot 80 - 30 \cdot 60 = 2.200 \text{ mm}^2$$

i el moment d'inèrcia respecte de l'eix Z,

$$I_z = (1/12)50 \cdot 80^3 - (1/12)30 \cdot 60^3 = 1,59 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

i, respecte de l'eix Y,

$$I_y = (1/12)80 \cdot 50^3 - (1/12)60 \cdot 30^3 = 7 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Fent un tall a la secció que passa per A i B (figura 10.12), i aplicant-hi l'estàtica, trobem els esforços a la secció

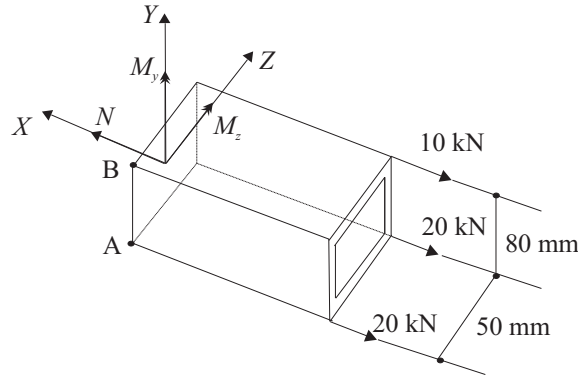
$$N = 50 \text{ kN}$$

$$M_y = 10 \text{ kN} \cdot 25 \text{ mm} = 250 \text{ kNmm}$$

$$M_z + 10 \text{ kN} \cdot 40 \text{ mm} = 2 \cdot 20 \text{ kN} \cdot 40 \text{ mm} \Rightarrow M_z = 1.200 \text{ kNmm}$$



Fig. 10.12



Així doncs, sobre la secció hi actua un esforç normal $N=50$ kN, un moment flector $M_z=1200$ kNmm i un altre moment flector $M_y=250$ kNmm. Substituint a l'equació general dels esforços combinats,

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

tindrem, al punt A,

$$\sigma_A = \frac{50 \text{ kN}}{2.200 \text{ mm}^2} - \frac{1.200 \text{ kNmm}}{1,59 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}(-40 \text{ mm}) + \frac{250 \text{ kNmm}}{7 \cdot 10^5 \text{ mm}^4}(-25 \text{ mm})$$

$$\sigma_A = 0,04396 \text{ kN/mm}^2 = 43,96 \text{ MPa}$$

i, al punt B,

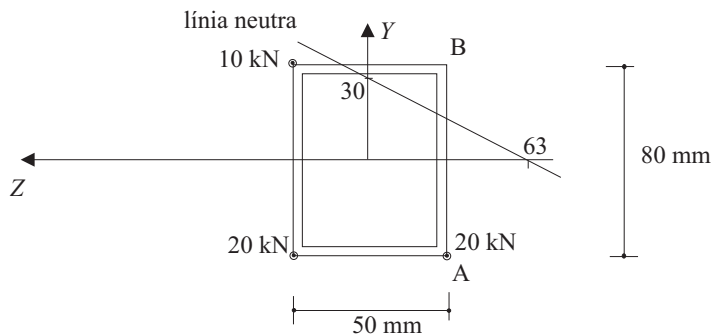
$$\sigma_B = \frac{50 \text{ kN}}{2.200 \text{ mm}^2} - \frac{1.200 \text{ kNmm}}{1,59 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}(40 \text{ mm}) + \frac{250 \text{ kNmm}}{7 \cdot 10^5 \text{ mm}^4}(-25 \text{ mm})$$

$$\sigma_B = -0,01641 \text{ kN/mm}^2 = -16,41 \text{ MPa}$$

La línia neutra l'obtenim igualant a 0 la tensió

$$0 = \frac{50 \text{ kN}}{2200 \text{ mm}^2} - \frac{1200 \text{ kNmm}}{1,59 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}y + \frac{250 \text{ kNmm}}{7 \cdot 10^5 \text{ mm}^4}z$$

Fig. 10.13

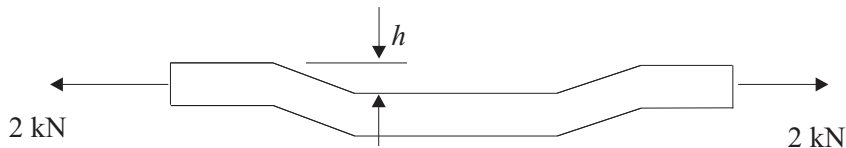


que passa pels punts $z = 0, y = 30,25 \text{ mm}$ i $z = -63,46 \text{ mm}, y = 0$. La representació gràfica de la línia neutra la tenim a la figura 10.13, que és la secció que passa per A i B, vista des de l'exterior (és a dir, l'eix Z ens queda cap a l'esquerra). Observem que els punts A i B estan situats a ambdós costats de la línia neutra; per tant, les tensions tenen signe diferent, tal com s'obté als càlculs.

Problema 10.6

Determineu el màxim doblec h que es pot aplicar a la barnilla circular de 10 mm de diàmetre de la figura 10.14 si la tensió màxima no ha d'excedir de 160 MPa.

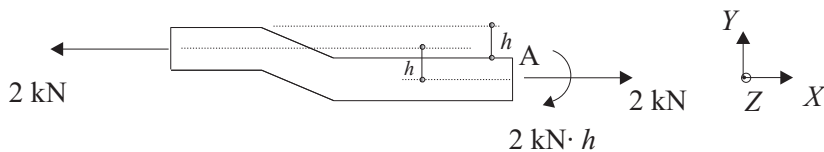
Fig. 10.14



Solució:

A la secció central de la peça (fig. 10.15), hi ha un esforç axial $N = 2 \text{ kN}$ de tracció i un moment flector $M_z = -2 \text{ kN} \cdot h$ (negatiu perquè va en sentit contrari a l'eix Z). El punt A és el més perillós ja que hi tenim la tracció deguda a l'esforç axial més la tracció deguda al moment flector. Substituint a l'equació general dels esforços combinats

Fig. 10.15



$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

i al punt A tindrem

$$\sigma_A = 160 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi 0,005^2 \text{ m}^2} + \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot h}{\pi/4 \cdot 0,005^4 \text{ m}^4} 0,005 \text{ m}$$

d'on

$$h = 0,0066 \text{ m} = 6,6 \text{ mm}$$

Problema 10.7

Trobeu la distribució de tensió normal i de cisallament a la secció de l'encastament de la figura 10.16. La secció transversal és quadrada de $20 \times 20 \text{ cm}$.

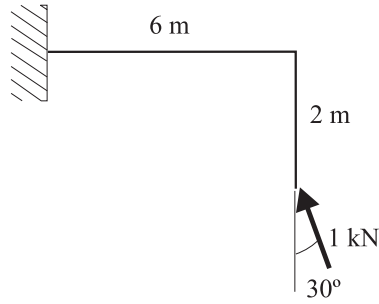


Fig. 10.16

Solució:

Fem un tall a l'encastament per calcular els esforços que hi apareixen (que són, en realitat, les reaccions externes) (figura 10.17),

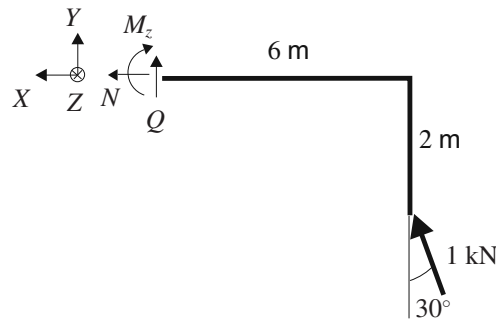


Fig. 10.17

Descomposant-ne la força d'1 kN i aplicant-hi l'estàtica, obtenim

$$N + 1 \text{ kN} \sin 30 = 0 \Rightarrow N = -1 \sin 30 \text{ kN}$$

$$Q + 1 \text{ kN} \cos 30 = 0 \Rightarrow Q = -1 \cos 30 \text{ kN}$$

$$M_z + 1 \sin 30 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 1 \cos 30 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} \Rightarrow M_z = 4,196 \text{ kNm}$$

Les tensions normals σ vénen donades per l'esforç normal N i pel moment flector M_z ; així doncs, utilitzant l'expressió

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y$$

tindrem, a la fibra superior, $y = 0,1 \text{ m}$,

$$\sigma_s = \frac{-0,5 \text{ kN}}{0,04} - \frac{4,196 \text{ kNm}}{\frac{1}{12} 0,2^4 \text{ m}^4} 0,1 \text{ m} = -3.159,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

a la fibra central, $y = 0$,

$$\sigma_G = \frac{-0,5 \text{ kN}}{0,04 \text{ m}^2} = -12,50 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

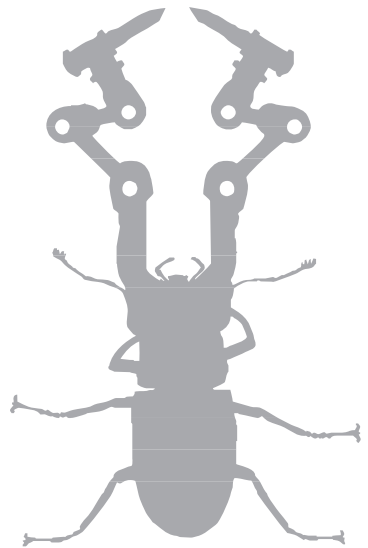


i a la fibra inferior, $y = -0,1 \text{ m}$,

$$\sigma_i = \frac{-0,5 \text{ kN}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} - \frac{4,196 \text{ kNm}}{\frac{1}{12} 0,2^4 \text{ m}^4} (-0,1 \text{ m}) = 3,134 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Pel que fa a la tensió de cisallament, a les fibres superior i inferior és zero i a la fibra central val, en valor absolut i, atès que es tracta d'un perfil rectangular,

$$\tau_G = \frac{3Q}{2A} = \frac{3(1 \cos 30 \text{ kN})}{2 \cdot 0,04 \text{ m}^2} = 32,47 \text{ kN/m}^2$$



Introducció al vinclament de barres

Una configuració en equilibri pot ser estable, neutra (indiferent) o bé inestable (fig. 11.1).

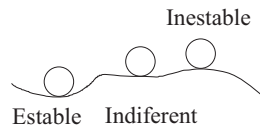
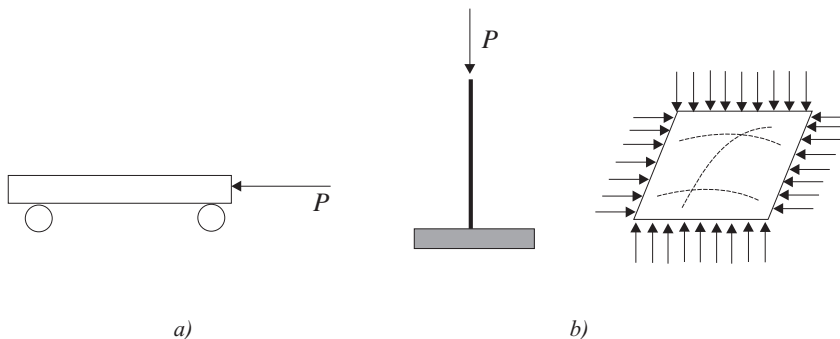


Fig.11.1
Tipus d'equilibri.

En l'equilibri estable, si la posició s'altera lleugerament, el sistema torna a la posició inicial. En l'equilibri neutre, si la posició s'altera lleugerament, el sistema continua en el mateix estat. En l'equilibri inestable, si la posició s'altera lleugerament, el sistema s'allunya cada vegada més de la posició inicial. La inestabilitat en una estructura pot ser deguda a la falta de suport o a la falta de gruix o esveltesa (fig. 11.2).

Fig.11.2
Inestabilitats:
a) per falta de suport,
b) per falta de gruix.

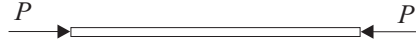


Definim el *vinclament* com una falla provocada per una inestabilitat deguda a l'acció de compressió sobre un element de l'estructura que, en general, es presenta de forma sobtada. La càrrega que dóna lloc al vinclament es denomina *càrrega crítica* P_{cr} i la tensió corresponent, σ_{cr} . Aquests valors poden estar molt per sota dels admissibles per tracció o compressió en flexió.



Considerem una barra prima i rectilínia en l'estat de referència, sotmesa a una força de compressió P (fig. 11.3). Prenem l'eix X en la direcció de la barra i els eixos Y, Z com a eixos principals d'inèrcia sobre la secció transversal. Suposem que la barra es vincla únicament al voltant d'un eix; el de menor moment d'inèrcia, que suposem que és el Z .

Fig. 11.3
Barra sotmesa a compressió.



Quan la barra es vincli, perdrà la forma rectilínia i hi apareixerà un moment flector m_z , a més de l'esforç normal $n_x = -P$. Utilitzant 6.18 i tenint en compte que no hi ha forces externes en direcció Y ni en Z , escriurem

$$EI_z y^{(IV)} + Py'' = 0 \quad (11.1)$$

L'equació 11.1 admet, evidentment, la solució $y = 0$, és a dir, un equilibri en el qual la barra es manté rectilínia. Aquest equilibri és estable sempre que P no superi un valor determinat, que és la càrrega crítica P_{cr} . Per a valors superiors a P_{cr} , la forma rectilínia de la barra correspon a un equilibri inestable, és a dir, que qualsevol pertorbació feta a la barra fa que aquesta es flexioni fortament. Per a $P = P_{cr}$, la forma rectilínia correspon a un equilibri indiferent, és a dir, que a més de la solució $y = 0$ existeixen altres solucions no rectilínies. Podem dir, doncs, que P_{cr} és el valor més petit de P per al qual 11.1 admet una solució no nul·la.

Vegem ara les condicions de contorn que s'han de complir segons quins siguin els lliams de la barra amb l'exterior. En el cas d'un encastament, a l'extrem encastat el desplaçament és zero i la tangent de la directriu serà també zero, és a dir, tindrem

$$y = 0 \quad y' = 0$$

En un extrem on hi hagi una articulació, el desplaçament serà zero i el moment també, és a dir,

$$y = 0 \quad y'' = 0$$

En un extrem lliure de subjeccions, és a dir, on solament hi hagi la força de compressió aplicada, el moment serà zero, és a dir, $y'' = 0$. D'altra banda (fig. 11.7), l'esforç de cisallament és $P \sin \alpha$, que es pot aproximar per $P \tan \alpha = Py'$ si considerem que α és petita.

Tenint en compte 6.17, podem escriure, doncs,

$$y''' = \frac{-P}{EI_z} y' \quad (11.2)$$

Vegem ara com calcular P_{cr} per a diferents condicions de contorn de la barra.

a) Barra articulada-articulada

Analitzem el cas d'una barra de longitud l , articulada en els dos extrems (fig. 11.4)

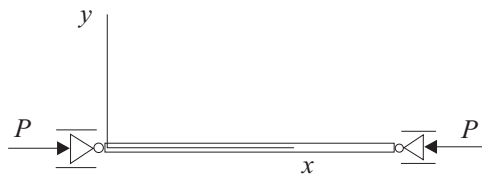


Fig.11.4
Barra articulada-
articulada.

Per la teoria de les equacions diferencials, sabem que una del tipus 11.1 admet una solució de la forma

$$y = A + Bx + C \sin kx + D \cos kx \quad (11.3)$$

on $k \equiv \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$, i les constants A, B, C i D s'han de determinar imposant les condicions de contorn. En aquest cas, són, per a $x = 0, l$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y'' &= 0 \end{aligned} \quad (11.4)$$

i imposant les condicions 11.4 a l'equació 11.3, s'obté

$$\begin{aligned} y &= C \sin kx \\ \sin kl &= 0 \end{aligned}$$

que representa mitja ona sinusoïdal. Designant P per P_{cr} ,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (11.5)$$

L'equació 11.5 es coneix amb el nom de *fórmula d'Euler*.

b) Barra encastada-encastada

Analitzem ara el cas d'una barra subjecta pels extrems, de manera que l'únic moviment possible és una translació en la direcció x (fig. 11.5).

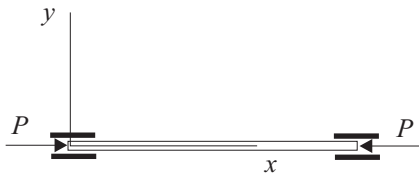


Fig.11.5
Barra encastada-
encastada.

Ara, les condicions de contorn són, per a $x = 0, l$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y' &= 0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

i, substituint 11.6 a l'equació 11.3, s'obtenen les quatre equacions

$$\begin{aligned} D + A &= 0 \\ kC + B &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C \sin kl + D \cos kl + B + A &= 0 \\ kC \cos kl - kD \sin kl + B &= 0 \end{aligned}$$

que constitueixen un sistema d'equacions homogeni amb incògnites A, B, C i D . Perquè el sistema tingui solució no nul·la, s'ha de complir que el determinant format pels coeficients sigui diferent de zero; això porta, després de desenvolupar el determinant, que o bé

$$\sin \frac{kl}{2} = 0$$

o bé

$$\tan \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2}$$

el valor de $kl/2$ més petit que compleix la primera condició és π , mentre que el valor més petit per a la segona és 4,49 (es pot obtenir aquest valor per resolució numèrica). Així doncs, el valor més petit per a $kl/2$ és π , per tant,

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (11.7)$$

c) Barra encastada-articulada

En tercer lloc, analitzem el cas d'una barra encastada en un extrem i articulada a l'altre (fig. 11.6)

Fig.11.6
Barra encastada-
articulada.



En aquest cas, les condicions de contorn són

$$\begin{aligned} y = y' &= 0 \quad \text{a } x = 0 \\ y = y'' &= 0 \quad \text{a } x = l \end{aligned}$$

condicions que, substituïdes a 11.3, fan que hagi de ser $\tan kl = kl$, la solució més petita de la qual és $kl = 4,49$; per tant, P_{cr} valdrà

$$P_{cr} = \frac{2,04\pi^2 EI_z}{l^2}$$

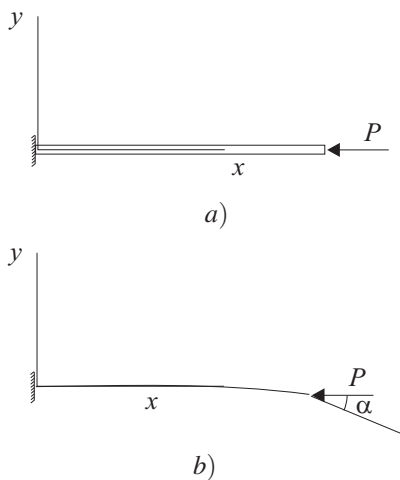
Observem que aquest valor està comprès entre el proporcionat per 11.5 i el de 11.7.

d) Barra encastada-lliure

Finalment, analitzem el cas d'una barra encastada en un extrem i lliure a l'altre (fig. 11.7). En aquest cas, a l'extrem $x = l$ s'ha de complir 11.2. Així doncs, les condicions de contorn, en aquest cas, són



Fig.11.7
Barra encastada-lliure.



$$y = y' = 0 \text{ a } x = 0$$

$$y'' = 0 \text{ i } y''' = -k^2 y' \text{ a } x = l$$

i, substituint a 11.3, s'obté

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2}$$

Observem que aquest valor és el més petit dels obtinguts en les quatre situacions analitzades.



Equacions de Navier-Bresse

L'objectiu principal de la mecànica de materials és calcular les forces, tant internes com externes, i les deformacions i els desplaçaments que apareixen en els diversos elements d'una estructura quan aquesta és sotmesa a càrregues externes.

Podem calcular les forces aplicant-hi les equacions de l'estàtica, sempre que l'estructura sigui isostàtica. En cas d'estructures hiperestàtiques, es necessiten noves equacions, que, afegides a les de l'estàtica, permeten resoldre el problema. En aquest capítol i en els següents, analitzem el càlcul de les forces, tant reaccions externes com forces internes, i el càlcul dels desplaçaments dels diversos punts de l'estructura, sigui isostàtica o hiperestàtica. De fet, com veurem, el càlcul de forces en estructures hiperestàtiques i el càlcul de desplaçaments van lligats entre si.

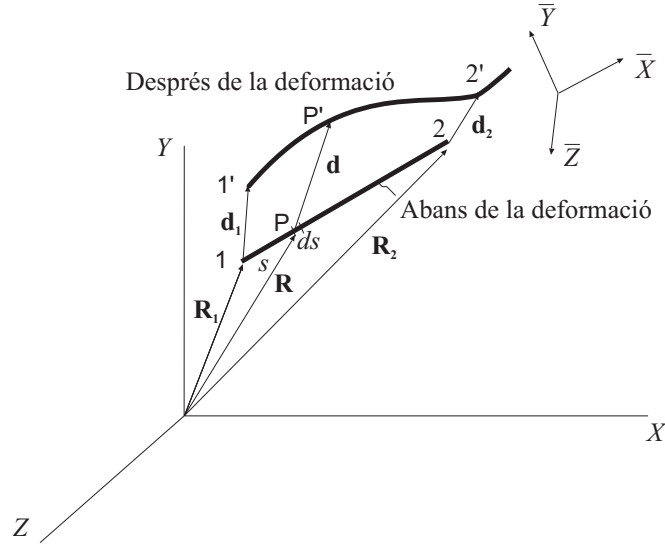
Els procediments que s'utilitzen per als càlculs esmentats són: les anomenades equacions de Navier-Bresse, que analitzarem en aquest capítol; l'aplicació directa dels teoremes energètics, que veurem al capítol 13, i els mètodes matricials, que veurem al capítol 14.

Considerem una barra recta en l'estat no deformat (fig. 12.1). En definim uns eixos locals, de manera que l'eix \bar{X} coincideix amb l'eix de la barra i els eixos \bar{Y} i \bar{Z} són eixos principals d'inèrcia de la secció transversal, i uns eixos globals X, Y, Z , que serviràn per identificar la secció transversal; la coordenada curvilínia en direcció de la barra la designem per s .

Calculem els desplaçaments i les rotacions de les seccions transversals de barres sotmeses a esforços interns. Considerem que són petits, a més de les deformacions, també els desplaçaments i les rotacions. Observem que, com que ara el que ens interessa és estudiar els moviments de les seccions transversals, i no les tensions que tenen lloc al seu interior, i per això hem de fer servir els eixos globals, per simplicitat en l'escriptura els hem definit sense sobreratllat i els eixos locals, amb sobreratllat.

El vector de rotació unitària de la secció transversal de la barra que passa per un punt P de la línia de centroides el designem per $\bar{\theta}$ i el desplaçament d'aquest punt, per \mathbf{d} .

Fig. 12.1
Moviments a l'espai.



Com ja s'ha vist, dels sis esforços possibles, només $M_{\bar{x}}$, $M_{\bar{y}}$ i $M_{\bar{z}}$ provoquen rotació diferencial entre dues seccions molt properes. Agrupant els resultats obtinguts a 9.11 i 6.7, podem escriure, per a les components del vector de rotació diferencial, respecte dels eixos locals

$$d\vec{\theta} = \left(\frac{M_{\bar{x}}}{C}, \frac{M_{\bar{y}}}{EI_{\bar{y}}}, \frac{M_{\bar{z}}}{EI_{\bar{z}}} \right) ds$$

Cadascuna de les components $d\theta_i$ és la rotació diferencial al voltant de l'eix i respectivament. Integrant entre dos punts qualssevol de coordenades s_1 i s_2 de la línia de centroides, tenim

$$\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_{\bar{x}}}{C} ds \vec{i} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_{\bar{y}}}{EI_{\bar{y}}} ds \vec{j} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_{\bar{z}}}{EI_{\bar{z}}} ds \vec{k} \quad (12.1)$$

on $\vec{\theta}_1$ és la rotació de la secció 1 i $\vec{\theta}_2$, la de la secció 2.

El desplaçament dels diferents punts de la línia de centroides vénen donats pel moviment com a sòlid rígid (fig. 12.2), més el produït pels esforços. Aplicant-hi el principi de superposició i tenint en compte 5.5, 6.7, 13.22 i 9.11, escriurem

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1 + \vec{\theta}_1 \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{N_{\bar{x}}}{EA} ds \vec{i} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{Q_{\bar{y}}}{GA_{s\bar{y}}} ds \vec{j} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{Q_{\bar{z}}}{GA_{s\bar{z}}} ds \vec{k} + \\ + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{M_{\bar{x}}}{C} \vec{i} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}) \right] ds + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{M_{\bar{y}}}{EI_{\bar{y}}} \vec{j} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}) \right] ds + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{M_{\bar{z}}}{EI_{\bar{z}}} \vec{k} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}) \right] ds \end{aligned} \quad (12.2)$$

on \mathbf{R} és el vector de posició del punt genèric de coordenada s , \mathbf{R}_1 el del punt de coordenada s_1 i \mathbf{R}_2 el del punt de coordenada s_2 . Els dos primers termes de la dreta són el desplaçament com a sòlid rígid; els tres següents, els corresponents als esforços normal

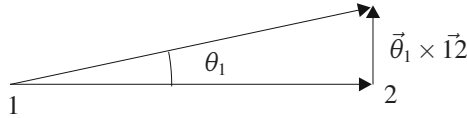


Fig. 12.2
Moviment com
a sòlid rígid.

i de cisallament, i els tres últims, als moments torsor i flectors. Les equacions 12.1 i 12.2 s'anomenen *equacions de Navier-Bresse*.

En el cas bidimensional, considerant que les càrregues actuen en el pla X, Y i negligint les deformacions per esforços de cisallament, si es designen les components del vector de desplaçament en les direccions dels eixos globals X, Y per u, v , respectivament, per M_z el moment flector (observem que, en aquest cas, fem coincidir \bar{Z} amb Z), per N l'esforç normal i per α l'angle que forma la tangent respecte de l'eix X , 12.1 i 12.2 s'escriuran

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} M_z ds \\ u_2 &= u_1 - \theta_1 (y_2 - y_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (y_2 - y) ds + \frac{1}{EA} \int_{s_1}^{s_2} N \cos \alpha ds \\ v_2 &= v_1 + \theta_1 (x_2 - x_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (x_2 - x) ds + \frac{1}{EA} \int_{s_1}^{s_2} N \sin \alpha ds\end{aligned}\quad (12.3)$$

Aquestes tres equacions s'anomenen, respectivament, *primera, segona i tercera equacions de Navier-Bresse*.

12.1. Problemes

Tots els exercicis corresponen al cas bidimensional; per tant, $\bar{Z} = Z$. Designem per X, Y, Z els eixos globals que ens serviran per localitzar les seccions transversals al llarg de les barres. Aquests eixos globals són fixos a l'espai, tot i que, per simplificar els càlculs, podem efectuar una translació d'eixos en l'aplicació de les equacions de Navier-Bresse a cada tram de la barra, i no una rotació, ja que això implicaria incompatibilitat en els desplaçaments generalitzats. Si observem, per exemple, el problema 12.1, l'eix X té el sentit cap a la dreta i l'eix Z perpendicular al paper cap a fora. En fer el tall hem aïllat la part de la dreta perquè ens és més comode, però l'eix global X continua anant de esquerra a dreta, per tant el tros medeix $l - x$ i el moment flector M_z l'hem dibuixat horari perquè és la reacció del que hauriem dibuixat positiu si haguéssim prè la part esquerra. La interpretació dels desplaçaments i girs és en funció d'aquests eixos globals. D'altra banda, generalment considerarem negligible la deformació per esforços normals i de cisallament; en aquests casos, doncs, a la secció transversal solament dibuixarem el moment flector M_z i el dibuixarem positiu d'acord amb els eixos globals, és a dir, seguint l'eix Z .

Problema 12.1

Calculeu el desplaçament vertical i el gir de la secció B de la barra de la figura 12.3. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

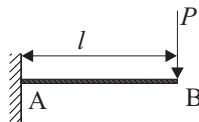


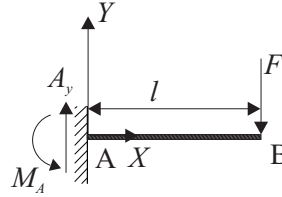
Fig. 12.3



Solució:

Les reaccions i els eixos globals els tenim representats a la figura 12.4

Fig. 12.4



Tenim, en total, quatre incògnites: les dues reaccions A_y , M_A , el gir de la secció B θ_B i el desplaçament vertical de la secció B, v_B . Necessitarem, doncs, quatre equacions: dues de l'estàtica i dues de Navier-Bresse.

Per les equacions de l'estàtica

$$A_y = P \quad (12.4)$$

$$M_A = Pl \quad (12.5)$$

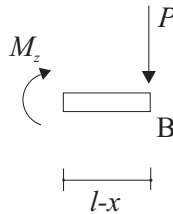
Les equacions de N-B per al tram A-B són

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A l + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z (l-x) dx$$

on M_z l'obtenim de fer un tall dins la regió A-B (fig. 12.5) i val $M_z = -P(l-x)$

Fig. 12.5



Per tant, substituint,

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^l -P(l-x) dx \quad (12.6)$$

$$v_B = v_A + \theta_A l + \frac{1}{EI} \int_0^l -P(l-x)(l-x) dx \quad (12.7)$$

Resolent les quatre equacions (12.4- 12.7) i tenint en compte que $v_A = \theta_A = 0$ s'obté

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI} \curvearrowright$$

$$v_B = -\frac{Pl^3}{3EI} \downarrow$$

La deformada aproximada la tenim a la figura 12.6

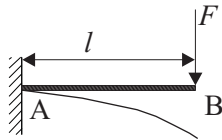


Fig. 12.6

Problema 12.2

Calculeu el desplaçament vertical i el gir de la secció 2 de la barra de la figura 12.7. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

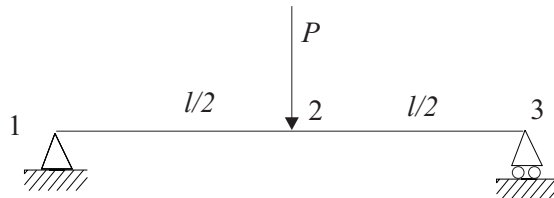


Fig. 12.7

Solució:

Les reaccions i els eixos globals els tenim representats a la figura 12.8

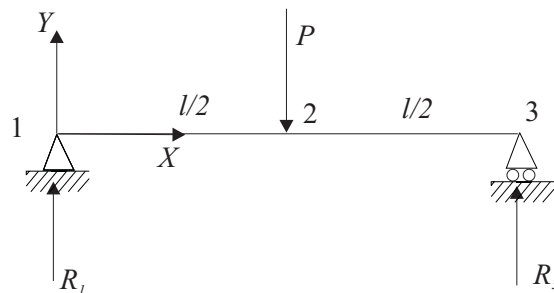


Fig. 12.8

Tenim, en total sis incògnites: les dues reaccions R_1 R_3 , els tres girs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ i el desplaçament vertical del punt 2, v_2 . Necessitarem, doncs, sis equacions: dues de l'estàtica i dues de Navier-Bresse per a cada tram.

Per les equacions de l'estàtica,

$$R_1 = R_3 = P/2 \quad (12.8)$$

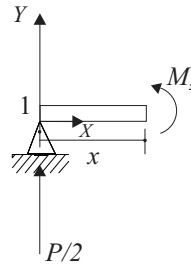
Les equacions de N-B per al tram 1-2 són

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} M_z dx$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 l/2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} M_z (l/2 - x) dx$$

on M_z l'obtenim de fer un tall dins la regió 1-2 (fig. 12.9) i val $M_z = \frac{P}{2}x$

Fig. 12.9



Per tant, substituint,

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{P}{2} x dx \quad (12.9)$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 l/2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{P}{2} x (l/2 - x) dx \quad (12.10)$$

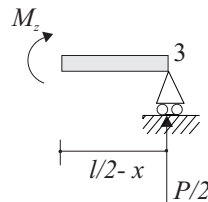
Les equacions de N-B per al tram 2-3 són (observem que hem desplaçat l'origen de coordenades al punt 2 i hem dibuixat el moment positiu d'acord amb els eixos globals)

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} M_z dx$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 l/2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} M_z (l/2 - x) dx$$

on M_z l'obtenim de fer un tall dins la regió 2-3 (fig. 12.10) i val $M_z = \frac{P}{2}(\frac{l}{2} - x)$

Fig. 12.10





Per tant, substituint

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \quad (12.11)$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 l/2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) (l/2 - x) dx \quad (12.12)$$

Resolent les sis equacions (12.8 - 12.12) i tenint en compte que $v_1 = v_3 = 0$, s'obté

$$\theta_1 = -\frac{Pl^2}{16EI} \curvearrowright, \quad \theta_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{Pl^3}{48EI} \downarrow$$

El valor $\theta_2 = 0$ també es podria haver imposat per simetria. La deformada aproximada la tenim a la figura 12.11

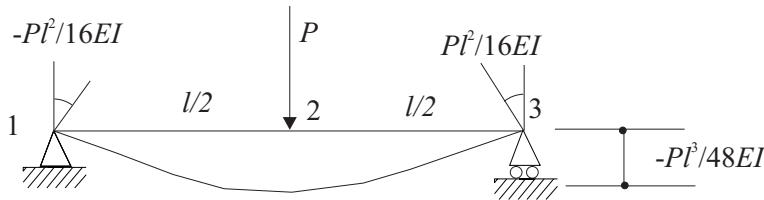


Fig. 12.11

Problema 12.3

Trobeu els girs dels extrems de la barra de la figura 12.12.

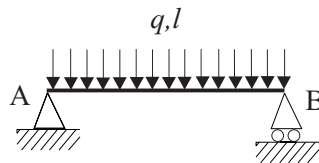


Fig. 12.12

Solució:

Les reaccions i els eixos globals els tenim representats a la figura 12.13.

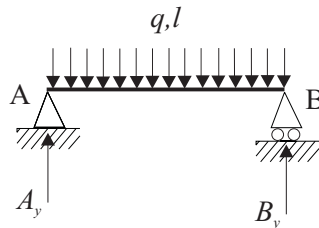


Fig. 12.13

Tenim, en total, quatre incògnites: les dues reaccions A_y , B_y , el gir de la secció A θ_A i el gir de la secció B, θ_B . Necessitarem, doncs, quatre equacions: dues de l'estàtica i dues de Navier-Bresse.

Per les equacions de l'estàtica,

$$A_y + B_y = ql \quad (12.13)$$

$$ql^2/2 = B_y l \quad (12.14)$$

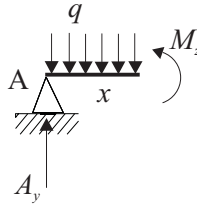
Les equacions de N-B per al tram A-B són

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A l + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z (l-x) dx$$

on M_z l'obtenim de fer un tall dins la regió A-B (fig. 12.14) i val $M_z = A_y x - qx^2/2$

Fig. 12.14



Per tant, substituïnt,

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^l (A_y x - qx^2/2) dx \quad (12.15)$$

$$v_B = v_A + \theta_A l + \frac{1}{EI} \int_0^l (A_y x - qx^2/2)(l-x) dx \quad (12.16)$$

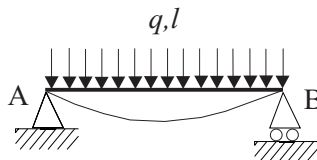
Resolent les quatre equacions (12.13-12.16) i tenint en compte que $v_A = v_B = 0$, s'obté

$$\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI} \quad \curvearrowright$$

$$\theta_B = \frac{ql^3}{24EI} \quad \curvearrowleft$$

La deformada aproximada la tenim a la figura 12.15.

Fig. 12.15





Problema 12.4

Trobeu els girs de les seccions 1,2,3 i el desplaçament de la secció 3 (fig. 12.16). Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.



Fig. 12.16

Solució:

Les reaccions i els eixos globals els tenim representats a la figura 12.17.

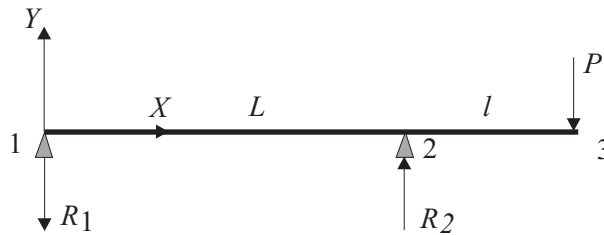


Fig. 12.17

Hi ha, en total, sis incògnites: les dues reaccions R_1 i R_2 , els tres girs θ_1 , θ_2 i θ_3 , i el desplaçament vertical del punt 3, v_3 . Necessitem, doncs, sis equacions, i aquestes seran dues de l'estàtica i dues de N-B per a cada tram de la barra.

Les equacions de l'estàtica són

$$R_1 + P = R_2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_2 L = P(L + l)$$

d'on

$$R_1 = Pl/L \quad (12.17)$$

$$R_2 = P(L + l)/L \quad (12.18)$$

Les equacions de N-B per al tram de barra 1-2 són

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^L M_z dx \\ v_2 &= v_1 + \theta_1 L + \frac{1}{EI} \int_0^L M_z (L - x) dx \end{aligned}$$

on el moment flector M_z és (fig. 12.18)

$$M_z = \frac{-Pl}{L} x$$

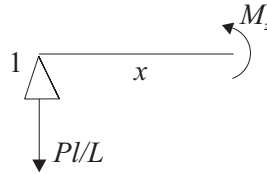


Substituint

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{-Pl}{L} x dx \quad (12.19)$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 L + \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{-Pl}{L} x(L-x) dx \quad (12.20)$$

Fig. 12.18



Les equacions de N-B per al tram de barra 2-3 són (fig. 12.19), (observem que hem desplaçat l'origen de coordenades al punt 2 i hem dibuixat el moment positiu d'acord amb els eixos globals)

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z dx$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 l + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z (l-x) dx$$

on el moment flector M_z és

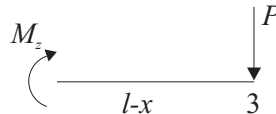
$$M_z = -P(l-x)$$

Substituint

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^l -P(l-x) dx \quad (12.21)$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 l + \frac{1}{EI} \int_0^l -P(l-x)(l-x) dx \quad (12.22)$$

Fig. 12.19



Resolent les sis equacions (12.17- 12.22) i tenint en compte que $v_1 = v_2 = 0$, s'obté

$$\theta_1 = \frac{PlL}{6EI} \quad \curvearrowright$$

$$\theta_2 = -\frac{PlL}{3EI} \quad \curvearrowleft$$



$$\theta_3 = -\frac{PIL}{3EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$v_3 = -\frac{Pl^2L}{3EI} - \frac{Pl^3}{3EI}$$

Un valor positiu del gir significa un gir en el sentit de l'eix Z , en aquest cas antihorari. Un valor positiu del desplaçament vertical és un desplaçament en el sentit de l'eix Y , cap amunt en aquest cas.

L'esquema de la deformada serà el de la figura 12.20.

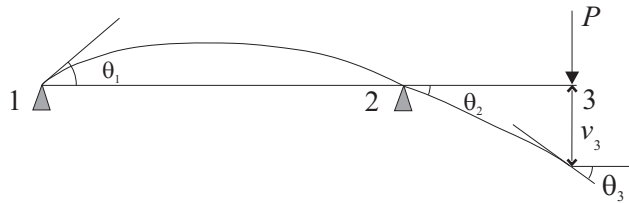


Fig. 12.20

Problema 12.5

Calculeu les reaccions als extrems de la barra de la figura 12.21. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

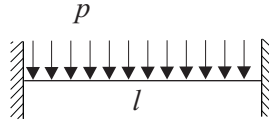


Fig. 12.21

Solució:

Les reaccions i els eixos globals els tenim representats a la figura 12.22. Hi ha, en total, quatre incògnites: les quatre reaccions R_1, M_1, R_2, M_2 . Necessitem, doncs, quatre equacions, que seran dues de l'estàtica i dues de N-B.

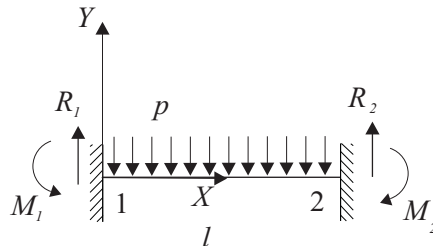


Fig. 12.22

Així, les equacions de l'estàtica aplicades a la barra són

$$R_1 + R_2 = pl$$

$$M_2 + pl^2/2 = M_1 + R_2l \quad (12.23)$$



Les equacions de N-B entre els punts 1 i 2 són

$$\theta_2 = \theta_1 + \int_0^l \frac{M_z}{EI} dx$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 l + \int_0^l \frac{M_z}{EI} (l-x) dx$$

on el moment flector és, fig. 12.23

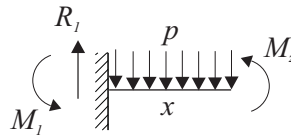
$$M_z = -px^2/2 - M_1 + R_1 x$$

i substituint

$$\theta_2 = \theta_1 + \int_0^l \frac{-px^2/2 - M_1 + R_1 x}{EI} dx \quad (12.24)$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 l + \int_0^l \frac{-px^2/2 - M_1 + R_1 x}{EI} (l-x) dx \quad (12.25)$$

Fig. 12.23



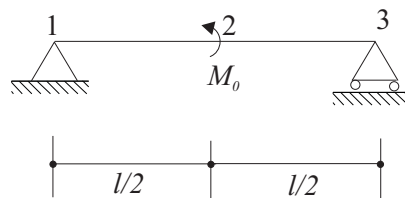
Resolent les quatre equacions (12.23-12.25) i tenint en compte que $\theta_1 = \theta_2 = v_1 = v_2 = 0$, s'obté

$$R_1 = R_2 = \frac{pl}{2}, M_1 = M_2 = \frac{pl^2}{12}$$

Problema 12.6

Calculeu el gir dels nusos 1, 2, 3 i la fletxa del nus 2 de la barra de la figura 12.24 i dibuixeu-ne de forma aproximada la deformata.

Fig. 12.24





Solució:

Les reaccions i els eixos globals els tenim representats a la figura 12.25. Hi ha, en total, sis incògnites: les dues reaccions R_1 i R_3 , els 3 girs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ i el desplaçament del punt 2, v_2 ; necessitem, doncs, sis equacions: dues de l'estàtica i dues de Navier-Bresse per a cada tram.

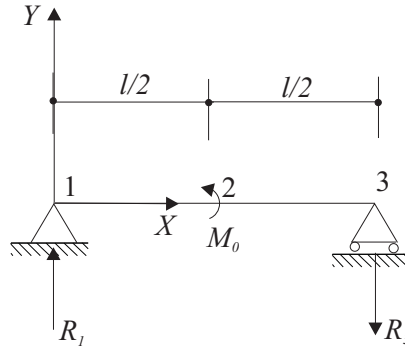


Fig. 12.25

Les equacions de l'estàtica són

$$R_1 = R_3 \quad (12.26)$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow M_0 = R_3 l \quad (12.27)$$

Les equacions de N-B entre els punts 1 i 2 són

$$\theta_2 = \theta_1 + \int_0^{l/2} \frac{M_z}{EI} dx$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 l/2 + \int_0^{l/2} \frac{M_z}{EI} (l/2 - x) dx$$

on el moment flector és (fig. 12.26)

$$M_z = R_1 x = \frac{M_0}{l} x$$

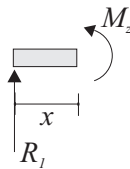


Fig. 12.26

Substituint,

$$\theta_2 = \theta_1 + \int_0^{l/2} \frac{M_0}{EI} \frac{x}{l} dx \quad (12.28)$$



$$v_2 = v_1 + \theta_1 l/2 + \int_0^{l/2} \frac{M_0}{EI} (l/2 - x) dx \quad (12.29)$$

Les equacions de N-B entre els punts 2 i 3 són

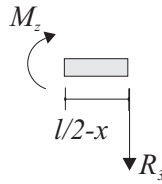
$$\theta_3 = \theta_2 + \int_0^{l/2} \frac{M}{EI} dx$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 l/2 + \int_0^{l/2} \frac{M}{EI} (l/2 - x) dx$$

on el moment flector és (fig. 12.27) (observem que hem desplaçat l'origen de coordenades al punt 2 i hem dibuixat el moment positiu d'acord amb els eixos globals)

$$M = -R_3(l/2 - x)$$

Fig. 12.27



Substituint,

$$\theta_3 = \theta_2 + \int_0^{l/2} \frac{-R_3(l/2 - x)}{EI} dx \quad (12.30)$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 l/2 + \int_0^{l/2} \frac{-R_3(l/2 - x)}{EI} (l/2 - x) dx \quad (12.31)$$

Resolent les equacions (12.26-12.31) i tenint en compte que $v_1 = v_3 = 0$, s'obté

$$R_1 = M_0/l$$

$$R_3 = M_0/l$$

$$\theta_1 = -\frac{M_0 l}{24EI} \quad \curvearrowright$$

$$\theta_2 = \frac{M_0 l}{12EI} \quad \curvearrowleft$$

$$\theta_3 = -\frac{M_0 l}{24EI} \quad \curvearrowright$$

$$v_2 = 0$$



Un valor positiu del gir significa un gir en el sentit de l'eix Z , en aquest cas antihorari. Un valor positiu del desplaçament vertical és un desplaçament en el sentit de l'eix Y , cap amunt en aquest cas.

En vista dels resultats, la deformada de l'estructura serà la que s'indica a la figura 12.28

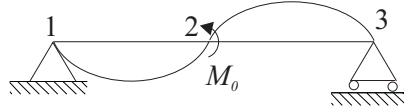


Fig. 12.28

Problema 12.7

Calculeu les reaccions i la fletxa del punt C, que és al centre de la barra de la figura 12.29.

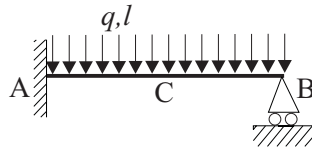


Fig. 12.29

Solució:

Les reaccions estan dibuixades a la figura 12.30 i també els eixos globals que utilitzarem.

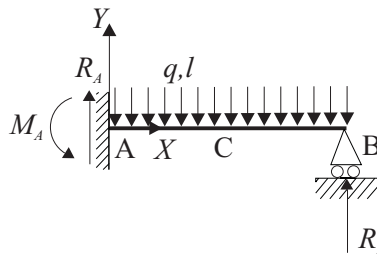


Fig. 12.30

Hi ha tres reaccions desconegudes i un grau de llibertat, el gir del punt B, desconegut; en total, doncs, quatre incògnites. Necessitem, per resoldre el problema, quatre equacions: dues de l'estàtica i dues de N-B aplicades al tros AB.

Les equacions de l'estàtica són

$$R_A + R_B = ql \quad (12.32)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + R_B l = ql^2/2 \quad (12.33)$$

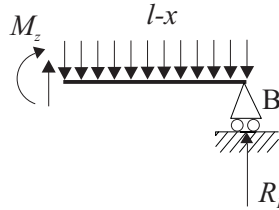
Les equacions de Navier-Bresse entre els punts A i B són

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A l + \frac{1}{EI} \int_0^l M_z (l-x) dx$$

on el moment flector és (fig. 12.31)

Fig. 12.31



$$M_z + \frac{q}{2}(l-x)^2 = R_B(l-x) \Rightarrow M_z = R_B(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2$$

Substituint,

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^l (R_B(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2) dx \quad (12.34)$$

$$v_B = v_A + \theta_A l + \frac{1}{EI} \int_0^l (R_B(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2)(l-x) dx \quad (12.35)$$

Resolent les equacions 12.32-12.35 i tenint en compte que $\theta_A = v_A = v_B = 0$, s'obté

$$R_B = \frac{3ql}{8}$$

$$R_A = \frac{5ql}{8}$$

$$M_A = \frac{ql^2}{8}$$

El desplaçament vertical del punt C el podem obtenir tornant a aplicar l'equació de N-B corresponent al desplaçament vertical entre els punts A i C

$$v_C = v_A + \theta_A l/2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} (R_B(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2)(l/2-x) dx$$

d'on

$$v_C = -\frac{ql^4}{192EI}$$

que és un desplaçament cap avall, ja que l'eix Y l'hem pres cap amunt.



Problema 12.8

Calculeu les reaccions i la fletxa del punt 2 de la figura 12.32. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$

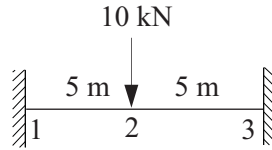


Fig. 12.32

Solució:

A la figura 12.33, estan dibuixades les reaccions i també els eixos globals que utilitzarem. Per simetria, les reaccions verticals seran $R = 5 \text{ kN}$ iguals a banda i banda. Els moments també seran iguals, però no podem calcular-los per l'estàtica ja que no disposem de prou equacions. Per simetria, també podem afirmar que el gir de la secció 2 és zero. Així, hi ha solament dues incògnites: la reacció de moment M_1 i el desplaçament vertical de la secció 2; necessiten, doncs, dues equacions, que seran les de Navier-Bresse aplicades al tros 1-2 o al tros 2-3. Observem que no té sentit utilitzar les equacions de l'estàtica si ja hem fet servir les consideracions de simetria.

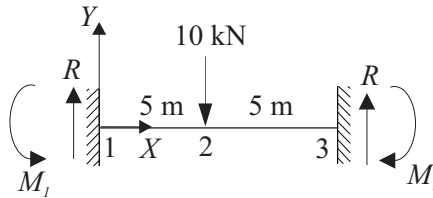


Fig. 12.33

Les equacions de Navier-Bresse entre els punts 1 i 2 són

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 M_z dx$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 5 + \frac{1}{EI} \int_0^5 M_z (5-x) dx$$

on el moment flector és (fig. 12.34)

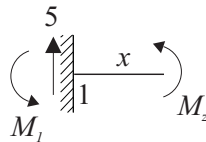


Fig. 12.34

$$M_z = 5x - M_1$$

Substituint,

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (5x - M_1) dx \quad (12.36)$$



$$v_2 = v_1 + \theta_1 5 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (5x - M_1)(5 - x) dx \quad (12.37)$$

Resolent les equacions 12.36 i 12.37 i tenint en compte que $\theta_1 = v_1 = \theta_2 = 0$, s'obté

$$M_1 = 12,5 \text{ kNm}$$

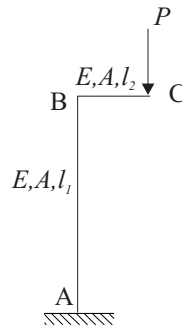
$$v_2 = -0,5 \text{ mm}$$

que és un desplaçament cap avall, ja que l'eix Y l'hem pres cap amunt.

Problema 12.9

Calculeu els desplaçaments i els girs dels punts B i C de la figura 12.35. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

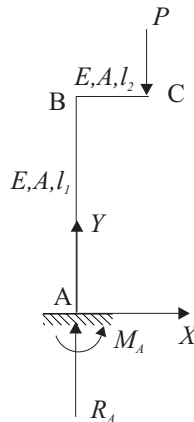
Fig. 12.35



Solució:

Les reaccions les tenim a la figura 12.36, on també hi ha dibuixats els eixos globals amb els quals treballarem.

Fig. 12.36



Les incògnites, incloses les reaccions i els graus de llibertat dels nusos, són: les reaccions R_A i M_A , el gir i els dos desplaçaments del nus B θ_B, u_B, v_B , i els del nus C θ_C, u_C, v_C . En



total, vuit incògnites. Necessitarem, doncs, vuit equacions: dues de l'estàtica i sis (3×2) de N-B per a les barres.

Les equacions de l'estàtica són

$$R_A = P \quad (12.38)$$

$$M_A = Pl_2 \quad (12.39)$$

Les equacions de Navier-Bresse que hem d'utilitzar en aquest cas són les generals per al cas bidimensional, sense incloure-hi l'esforç de cisallament

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} M_z ds$$

$$u_2 = u_1 - \theta_1(y_2 - y_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (y_2 - y) ds + \frac{1}{EA} \int_{s_1}^{s_2} N \cos \alpha ds$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1(x_2 - x_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (x_2 - x) ds + \frac{1}{EA} \int_{s_1}^{s_2} N \sin \alpha ds$$

Per a la barra AB, tenint en compte que $s = y$, $N = -P$ i $M_z = -Pl_2$ (fig. 12.37), serà

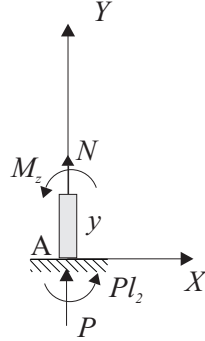


Fig. 12.37

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^{l_1} (-Pl_2) dy \quad (12.40)$$

$$u_B = u_A - \theta_A l_1 - \frac{1}{EI} \int_0^{l_1} (-Pl_2)(l_1 - y) dy + \frac{1}{AE} \int_0^{l_1} -P \cos 90 dy \quad (12.41)$$

$$v_B = v_A + \theta_A 0 + \frac{1}{EI} \int_0^{l_1} (-Pl_2) 0 dy + \frac{1}{AE} \int_0^{l_1} -P \sin 90 dy \quad (12.42)$$

Les equacions de N-B per a la barra BC són, tenint en compte que $s = x$, $N = 0$ i $M_z = -P(l_2 - x)$ (fig. 12.38),

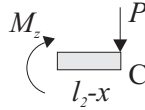
$$\theta_C = \theta_B + \frac{1}{EI} \int_0^{l_2} -P(l_2 - x) dx \quad (12.43)$$



$$u_C = u_B - \theta_B l_2 - \frac{1}{EI} \int_0^{l_2} -P(l_2 - x) 0 dx \quad (12.44)$$

$$v_C = v_B + \theta_B l_2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l_2} -P(l_2 - x)(l_2 - x) dx \quad (12.45)$$

Fig. 12.38



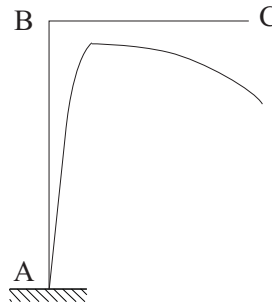
Resolent les equacions 12.38-12.45 i tenint en compte que $\theta_A = u_A = v_A = 0$, s'obté

$$\theta_B = \frac{-Pl_2 l_1}{EI} \quad \rightarrow \quad u_B = \frac{Pl_2 l_1^2}{2EI} \rightarrow v_B = -\frac{Pl_1}{AE} \downarrow$$

$$\theta_C = -\frac{Pl_2}{EI} \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) \quad \rightarrow \quad u_C = \frac{Pl_2 l_1^2}{2EI} \rightarrow v_C = -\frac{Pl_1}{AE} - \frac{Pl_2^2 l_1}{EI} - \frac{Pl_2^3}{3EI} \downarrow$$

Tenint en compte els resultats obtinguts, la deformada de l'estructura és la representada a la figura 12.39

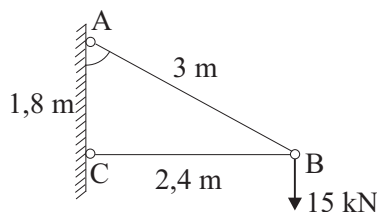
Fig. 12.39



Problema 12.10

Les dues barres AB i CD de la figura 12.40 estan connectades mitjançant un passador i lligades a l'exterior també amb passadors. Sabent que les seccions transversals són $A_{AB} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{BC} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, i que els mòduls de Young respectius són $E_{AB} = 200 \text{ GPa}$ i $E_{BC} = 12 \text{ GPa}$, trobeu el desplaçament del punt B.

Fig. 12.40





Solució:

Les reaccions les tenim a la figura 12.41, on també hi ha dibuixats els eixos globals amb els quals treballarem.

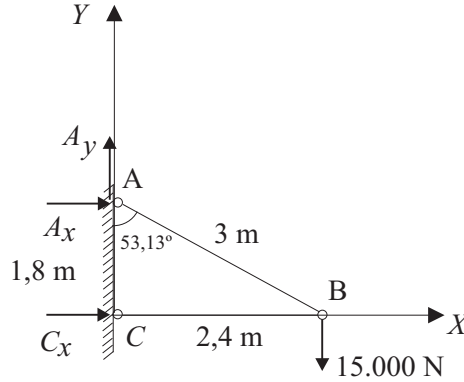


Fig. 12.41

Les incògnites són: les reaccions A_x , A_y , C_x i els graus de llibertat no coaccionats θ_A , θ_C , θ_B^+ , θ_B^- , u_B , v_B (θ_B^- és el gir de l'extrem de la barra AB i θ_B^+ és el gir de l'extrem de la barra CB, que seran diferents). En total, nou incògnites; necessitarem, doncs, nou equacions: tres de l'estàtica i sis (3×2) de N-B per a les barres.

Les equacions de l'estàtica són

$$A_x + C_x = 0 \quad (12.46)$$

$$A_y = 15.000 \quad (12.47)$$

$$A_x \cdot 1,8 + 15.000 \cdot 2,4 = 0 \quad (12.48)$$

Les equacions de Navier-Bresse que hem d'utilitzar en aquest cas són les generals per al cas bidimensional sense incloure-hi l'esforç de cisallament

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} M_z ds$$

$$u_2 = u_1 - \theta_1(y_2 - y_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (y_2 - y) ds + \frac{1}{EA} \int_{s_1}^{s_2} N \cos \alpha ds$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1(x_2 - x_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (x_2 - x) ds + \frac{1}{EA} \int_{s_1}^{s_2} N \sin \alpha ds$$

Per a la barra AB, tenint en compte que $M_z = 0$ perquè és una estructura articulada, tindrem

$$\theta_B^- = \theta_A \quad (12.49)$$



$$u_B = u_A + \theta_A 1,8 + \frac{1}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,125 \cdot 10^{-4}} \int_0^3 N_{AB} \cos(-36,86^\circ) ds \quad (12.50)$$

$$v_B = v_A + \theta_A 2,4 + \frac{1}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,125 \cdot 10^{-4}} \int_0^3 N_{AB} \sin(-36,86^\circ) ds \quad (12.51)$$

Per a la barra CB, tindrem

$$\theta_B^+ = \theta_C \quad (12.52)$$

$$u_B = u_C - \theta_C \cdot 0 + \frac{1}{12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \int_0^{2.4} N_{CB} \cos 0 ds \quad (12.53)$$

$$v_B = v_C + \theta_C 2,4 + \frac{1}{12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \int_0^{2.4} N_{CB} \sin 0 ds \quad (12.54)$$

Resolent les equacions (12.46-12.48), obtenim les reaccions (ja que es tracta d'un problema isostàtic)

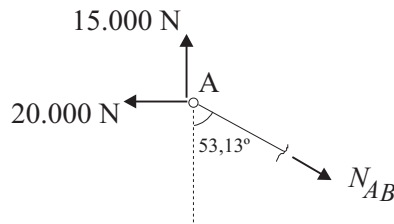
$$A_x = -20.000 \text{ N}$$

$$A_y = 15.000 \text{ N}$$

$$C_x = 20.000 \text{ N}$$

i, tenint en compte que $N_{AB} = 25.000 \text{ N}$ (fig. 12.42),

Fig. 12.42



i $N_{CB} = -20.000 \text{ N}$ (fig. 12.43)

Fig. 12.43



resolent les equacions (12.49-12.54) i, tenint en compte que $u_A = v_A = u_C = v_C = 0$, s'obté, a més de les altres incògnites,

$$u_B = -2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -0,2 \text{ mm} \leftarrow$$

$$v_B = -22,32 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -2,23 \text{ mm} \downarrow$$



Problema 12.11

Resoleu l'estructura de la figura 12.44, on el suport 2 experimenta un descens de $72/EI$. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ i negligiu-ne les deformacions per esforços normals i per cisallament.

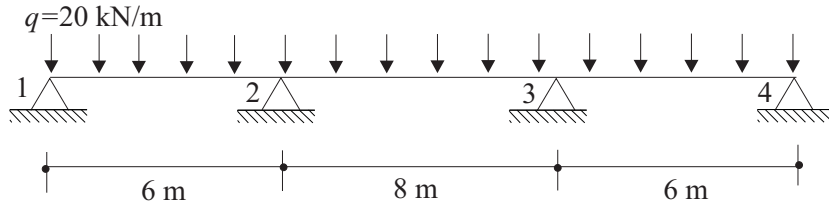


Fig. 12.44

Solució:

Les reaccions les tenim a la figura 12.45, on també hi ha dibuixats els eixos globals amb els quals treballarem.

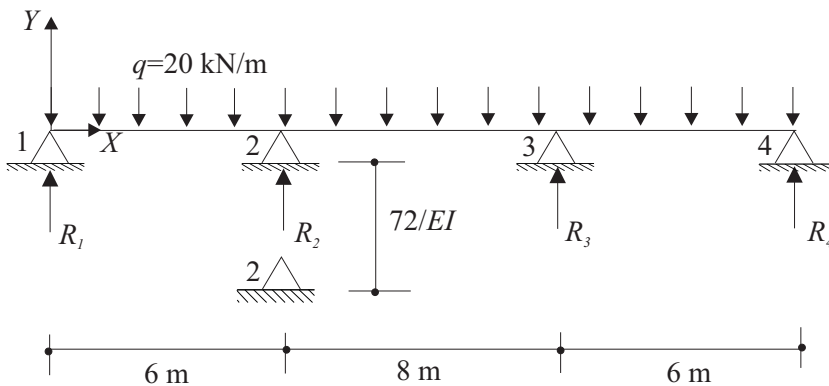


Fig. 12.45

Hi ha dos graus de llibertat per a cada nus: el desplaçament vertical i el gir. Com que hi ha quatre nusos, tenim en total vuit graus de llibertat. Això implica que tindrem vuit incògnites, que en aquest cas seran: quatre reaccions (que corresponen als graus de llibertat restringits) i quatre girs.

Necessitem, doncs, vuit equacions, que seran: dues de l'estàtica aplicada al conjunt i dues de Navier-Bresse per a cada tram de barra, que anomenarem barra 1, barra 2 i barra 3, respectivament.

Les equacions de l'estàtica seran

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 &= 400 \\ R_1 \cdot 6 + 400 \cdot 4 &= R_3 \cdot 8 + R_4 \cdot 14 \end{aligned} \quad (12.55)$$

Les equacions de Navier-Bresse entre els punts 1 i 2 són

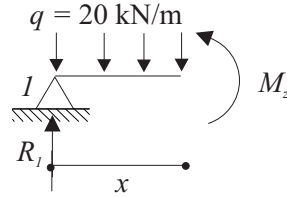
$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^6 M_z dx$$



$$v_2 = v_1 + \theta_1 6 + \frac{1}{EI} \int_0^6 M_z(6-x)dx$$

on el moment flector és (fig. 12.46)

Fig. 12.46



$$M_z = -10x^2 + R_1x$$

i, substituint,

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^6 (-10x^2 + R_1x)dx \quad (12.56)$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 6 + \frac{1}{EI} \int_0^6 (-10x^2 + R_1x)(6-x)dx \quad (12.57)$$

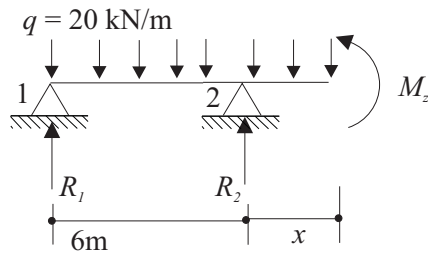
Les equacions de Navier-Bresse entre els punts 2 i 3 són

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^8 M_z dx$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 8 + \frac{1}{EI} \int_0^8 M_z(8-x)dx$$

on el moment flector és (fig. 12.47)

Fig. 12.47



$$M_z + 120(3+x) + 10x^2 = R_1(6+x) + R_2x$$

i, substituint,

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^8 (R_1(6+x) + R_2x - 120(3+x) - 10x^2)dx \quad (12.58)$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 8 + \frac{1}{EI} \int_0^8 (R_1(6+x) + R_2x - 120(3+x) - 10x^2)(8-x)dx \quad (12.59)$$



Les equacions de Navier-Bresse entre els punts 3 i 4 són

$$\theta_4 = \theta_3 + \frac{1}{EI} \int_0^6 M_z dx$$

$$v_4 = v_3 + \theta_3 6 + \frac{1}{EI} \int_0^6 M_z (6-x) dx$$

on el moment flector és (fig. 12.48)

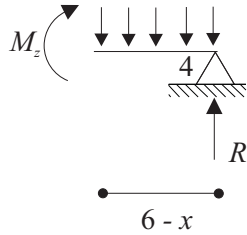


Fig. 12.48

$$M_z = R_4(6-x) - 10(6-x)^2$$

i, substituint,

$$\theta_4 = \theta_3 + \frac{1}{EI} \int_0^6 (R_4(6-x) - 10(6-x)^2) dx \quad (12.60)$$

$$v_4 = v_3 + \theta_3 6 + \frac{1}{EI} \int_0^6 (R_4(6-x) - 10(6-x)^2)(6-x) dx \quad (12.61)$$

Resolent el sistema format per les equacions 12.55 a 12.61, tenint en compte que $v_1 = v_3 = v_4 = 0$ i que $v_2 = -72/EI$, s'obté

$$R_1 = 44,57 \text{ kN}$$

$$R_2 = 153,4 \text{ kN}$$

$$R_3 = 160,13 \text{ kN}$$

$$R_4 = 41,88 \text{ kN}$$

$$\theta_1 = -0,001 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = -0,00018 \text{ rad}$$

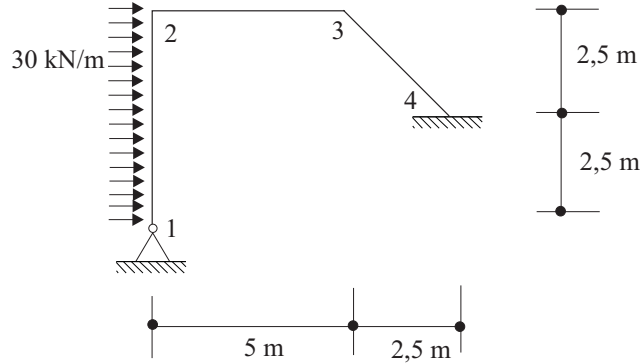
$$\theta_3 = 0,0003 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0,0006 \text{ rad}$$

Problema 12.12

Calculeu les reaccions i els moviments dels punts 1, 2, 3 i 4 del pòrtic de la figura 12.49, negligint les deformacions per esforços normals i per cisallament. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$.

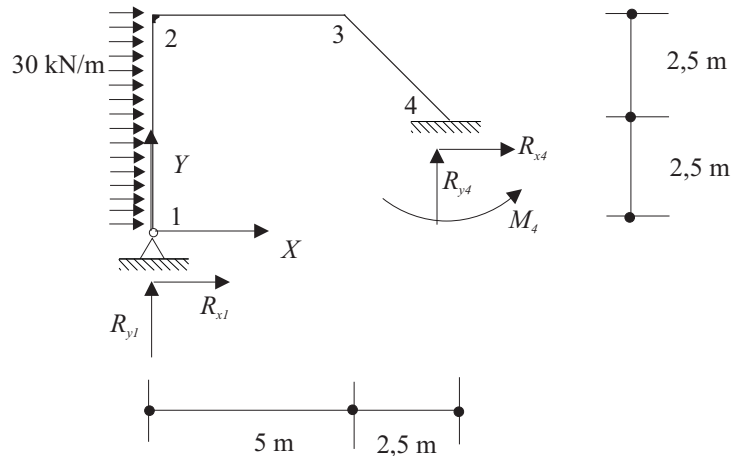
Fig. 12.49



Solució:

Les reaccions les tenim a la figura 12.50, on també hi ha dibuixats els eixos globals amb els quals treballarem.

Fig. 12.50



Hi ha cinc reaccions externes: R_{x1} , R_{y1} , R_{x4} , R_{y4} , M_4 i set moviments dels nusos: θ_1 , u_2 , v_2 , θ_2 , u_3 , v_3 , θ_3 ; en total, dotze incògnites. Per tant, necessitem 12 equacions. Les equacions seran: tres de l'estàtica aplicada al conjunt i les tres de Navier-Bresse per a cada barra.

Les equacions de l'estàtica són

$$\begin{aligned} R_{x1} + 150 + R_{x4} &= 0 \\ R_{y1} + R_{y4} &= 0 \\ 375 + R_{x4}2,5 &= R_{y4}7,5 + M_4 \end{aligned} \quad (12.62)$$

Les equacions de Navier-Bresse que hem d'utilitzar en aquest cas són les generals per al cas bidimensional sense incloure-hi els esforços normals ni de cisallament, entre dos punts 1 i 2, i s'escriuen



$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} M_z ds$$

$$u_2 = u_1 - \theta_1(y_2 - y_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (y_2 - y) ds$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1(x_2 - x_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (x_2 - x) ds$$

Per a la barra 1-2, tenint en compte que $s = y$ i $M_z = -15y^2 - R_{x1}y$ (fig. 12.51) serà

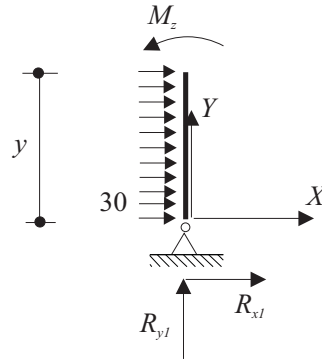


Fig. 12.51

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-15y^2 - R_{x1}y) dy \quad (12.63)$$

$$u_2 = u_1 - \theta_1(5 - 0) - \frac{1}{EI} \int_0^5 (-15y^2 - R_{x1}y)(5 - y) dy \quad (12.64)$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1(0 - 0) + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-15y^2 - R_{x1}y) 0 dy \quad (12.65)$$

Per a la barra 2-3, tenint en compte que $s = x$ i $M_z = -375 - 5R_{x1} + R_{y1}x$ (fig. 12.52), serà

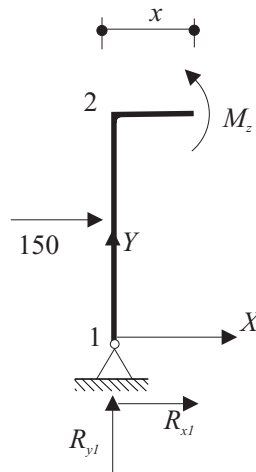


Fig. 12.52



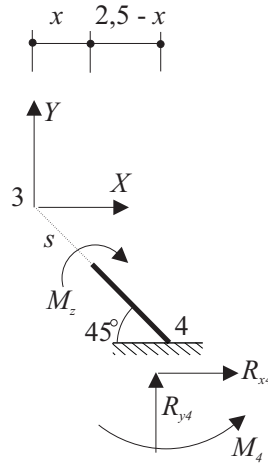
$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-375 - 5R_{x1} + R_{y1}x) dx \quad (12.66)$$

$$u_3 = u_2 - \theta_2 0 - \frac{1}{EI} \int_0^5 (-375 - 5R_{x1} + R_{y1}x)(0) dx \quad (12.67)$$

$$v_3 = v_2 + \theta_2 5 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-375 - 5R_{x1} + R_{y1}x)(5 - x) dx \quad (12.68)$$

Per a la barra 3-4, tenint en compte que $s \cos 45^\circ = x$ i, per tant, $ds = \sqrt{2}dx$, que $y = -x \tan 45^\circ = -x$ i que $M_z = M_4 + (R_{x4} + R_{y4})(2.5 - x)$ (fig. 12.53), serà

Fig. 12.53



$$\theta_4 = \theta_3 + \frac{1}{EI} \int_0^{2.5} (M_4 + (R_{x4} + R_{y4})(2.5 - x)) \sqrt{2} dx \quad (12.69)$$

$$u_4 = u_3 - \theta_3(-2.5) - \frac{1}{EI} \int_0^{2.5} (M_4 + (R_{x4} + R_{y4})(2.5 - x))(-2.5 + x) \sqrt{2} dx \quad (12.70)$$

$$v_4 = v_3 + \theta_3(2.5 - 0) + \frac{1}{EI} \int_0^{2.5} (M_4 + (R_{x4} + R_{y4})(2.5 - x))(2.5 - x) \sqrt{2} dx \quad (12.71)$$

resolent el sistema format per les equacions 12.62 a 12.71 i tenint en compte que $u_1 = v_1 = \theta_4 = u_4 = v_4 = 0$, s'obté

$$\begin{aligned} R_{x1} &= -73,66 \text{ kN} \\ R_{y1} &= -11,11 \text{ kN} \\ R_{x4} &= -76,33 \text{ kN} \\ R_{y4} &= 11,11 \text{ kN} \\ M_4 &= 100,83 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -0,002 \text{ rad} \quad \curvearrowright \\ u_2 &= 0,002 \text{ m} \rightarrow \\ v_2 &= 0 \end{aligned}$$



$$\theta_2 = 0,0010 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

$$u_3 = 0,002 \text{ m} \rightarrow$$

$$v_3 = 0,002 \text{ m} \uparrow$$

$$\theta_3 = -0,0006 \text{ rad} \quad \curvearrowleft$$

Problema 12.13

Resoleu l'estructura de la figura 12.54 negligint les deformacions per esforços normals i per cisallament. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ a totes les barres.

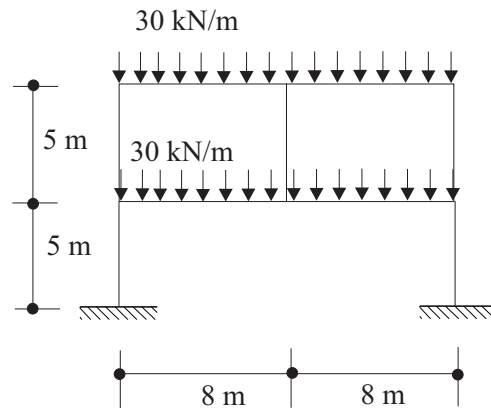


Fig. 12.54

Solució:

Les reaccions les tenim a la figura 12.55, on també hi ha dibuixats els eixos globals amb els quals treballarem. Recordem que els moments flectors els dibuixarem sempre positius, d'acord amb aquests eixos.

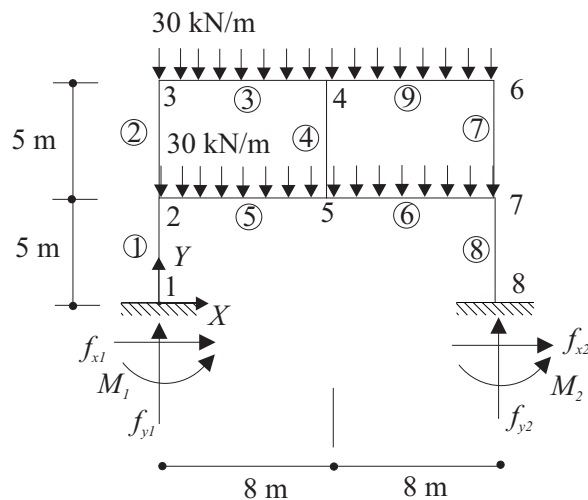


Fig. 12.55

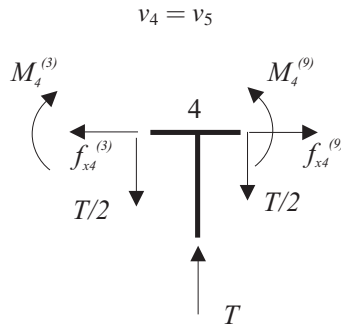
En haver-hi vuit nusos, hi haurà $8 \cdot 3 = 24$ components al vector de desplaçaments generalitzats (dos desplaçaments i un gir per a cada nus, ja que és una estructura plana); això vol dir que tindrem vint-i-quatre incògnites. De les vint-i-quatre incògnites, quatre corresponen als graus de llibertat restringits, és a dir, quatre reaccions i les altres vint són desplaçaments i girs dels nusos 2, 3, 4, 5, 6, 7.

En haver-hi marcs tancats, no podem obtenir els moments flectors en totes les barres en funció de les reaccions externes; solament podem fer-ho en les barres 1 i 8. Haurem "d'obrir" els marcs tancats, és a dir, haurem de fer dos talls (ja que hi ha dos marcs tancats): per exemple, un a la barra 5 i l'altre, a la 6; així podrem expressar analíticament tots els moments flectors en funció de les reaccions externes o dels esforços als talls oberts. En fer dos talls, hi introduïm sis incògnites més: els esforços als talls; en tenim, doncs, en total, $24 + 6 = 30$. Ens faran falta doncs trenta equacions. Les trenta equacions seran: les tres de Navier-Bresse per a cada barra ($3 \cdot 9 = 27$) més les tres de l'estàtica al conjunt.

En aquest cas, però, la simetria del problema redueix considerablement la quantitat d'incògnites per calcular. La línia que passa pels punts 4 i 5 és un eix de simetria de l'estructura; per tant, només caldrà resoldre'n la meitat; en prendrem la meitat esquerra.

A més, si observem el nus 4 (fig. 12.56), per simetria $f_{x4}^{(3)} = f_{x4}^{(9)}$, $M_4^{(3)} = M_4^{(9)}$ i, per tant, deduïm que la barra 4 només treballa a tracció o compressió; anomenem T l'esforç normal sobre la barra 4 i el dibuixem arbitràriament de compressió. Com que negligim la deformació per normal, es complirà

Fig. 12.56



Així doncs, la meitat esquerra de l'estructura quedarà representada per les càrregues que es dibuixen a la figura 12.57.

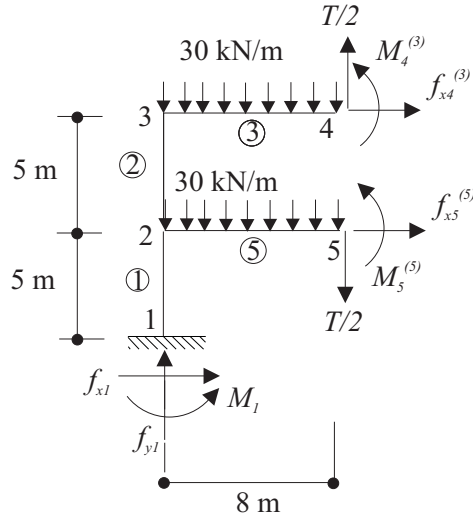
La simetria implica, a més, que

$$\begin{aligned} \theta_4 &= 0 \\ u_4 &= 0 \\ \theta_5 &= 0 \\ u_5 &= 0 \end{aligned} \quad (12.72)$$

Les equacions de Navier-Bresse que hem d'utilitzar, en aquest cas, són les generals per al cas bidimensional, sense incloure-hi els esforços normals ni els de cisallament, entre dos punts 1 i 2, i s'escriuen



Fig. 12.57



$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} M_z ds$$

$$u_2 = u_1 - \theta_1 (y_2 - y_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (y_2 - y) ds$$

$$v_2 = v_1 + \theta_1 (x_2 - x_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (x_2 - x) ds$$

Podem deduir directament d'elles, donat que negligim les deformacions per esforços normals, que

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 = v_3 = 0 \\ u_3 &= u_4 \\ u_5 &= u_2 \\ v_5 &= v_4 \end{aligned} \quad (12.73)$$

Considerant, doncs, 12.72 i 12.73, tindrem onze incògnites: $f_{x1}, f_{y1}, M_1, T, f_{x4}^{(3)}, M_4^{(3)}, f_{x5}^{(5)}, M_5^{(5)}, \theta_2, \theta_3, v_4$. Calculem-les.

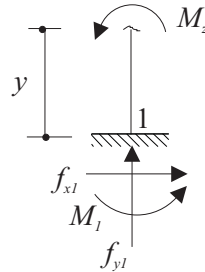
Les equacions de l'estàtica són

$$\begin{aligned} f_{x1} + f_{x4}^{(3)} + f_{x5}^{(5)} &= 0 \\ f_{y1} &= 480 \\ M_1 + M_4 + M_5 &= 1.920 + 10f_{x4}^{(3)} + 5f_{x5}^{(5)} \end{aligned} \quad (12.74)$$

Per a la barra 1, el moment flector (fig. 12.58) (no hi ha dibuixats ni l'esforç normal ni el de cisallament) és

$$M_z = -M_1 - f_{x1}y$$

Fig. 12.58



Així, la corresponent als girs

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 M_z dy = 0 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-M_1 - f_{x1}y) dy$$

i, integrant,

$$10^5 \theta_2 + 5M_1 + 12.5f_{x1} = 0 \quad (12.75)$$

i la corresponent als desplaçaments horitzontals

$$u_2 = u_1 - \theta_1 5 - \frac{1}{EI} \int_0^5 M_z (5-y) dy$$

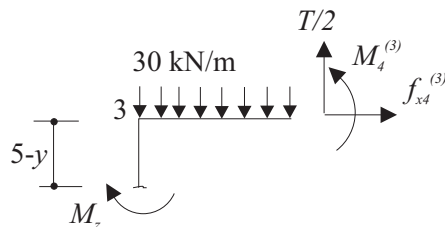
$$0 = 0 - 0 - \frac{1}{EI} \int_0^5 (-M_1 - f_{x1}y)(5-y) dy$$

i, integrant,

$$-12,5M_1 - 20,83f_{x1} = 0 \quad (12.76)$$

Per a la barra 2 (fig. 12.59),

Fig. 12.59



$$M_z = -960 - f_{x4}^{(3)}(5-y) + 4T + M_4^{(3)}$$

Així, la corresponent als girs

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^5 M_z dy = \theta_2 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-960 - f_{x4}^{(3)}(5-y) + 4T + M_4^{(3)}) dy$$



i, integrant,

$$10^5 \theta_3 - 10^5 \theta_2 + 12,5 f_{x^4}^{(3)} - 20T - 5M_4^{(3)} = -4.800 \quad (12.77)$$

i la corresponent als desplaçaments horitzontals

$$u_3 = u_2 - \theta_2 5 - \frac{1}{EI} \int_0^5 M_z(5-y) dy$$

$$0 = 0 - \theta_2 5 - \frac{1}{EI} \int_0^5 (-960 - f_{x^4}^{(3)}(5-y) + 4T + M_4^{(3)})(5-y) dy$$

i, integrant,

$$5 \cdot 10^5 \theta_2 - 41,6 f_{x^4}^{(3)} + 50T + 12,5 M_4^{(3)} = 12.000 \quad (12.78)$$

Per a la barra 3 (fig. 12.60),

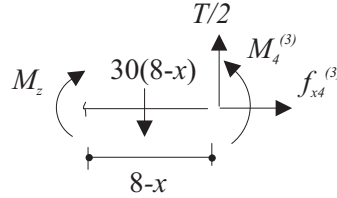


Fig. 12.60

$$M_z = -15(8-x)^2 + M_4^{(3)} + \frac{T}{2}(8-x)$$

Així, la corresponent als girs

$$\theta_4 = \theta_3 + \frac{1}{EI} \int_0^8 M_z dx$$

$$0 = \theta_3 + \frac{1}{EI} \int_0^8 (-15(8-x)^2 + M_4^{(3)} + \frac{T}{2}(8-x)) dx$$

i, integrant,

$$-10^5 \theta_3 - 8M_4 - 16T = -2.560 \quad (12.79)$$

i la corresponent als desplaçaments verticals

$$v_4 = v_3 + \theta_3 8 + \frac{1}{EI} \int_0^8 M_z(8-x) dx$$

$$v_4 = 0 + \theta_3 8 + 10^{-5} \int_0^8 (-15(8-x)^2 + M_4^{(3)} + \frac{T}{2}(8-x))(8-x) dx$$

i, integrant,

$$10^5 v_4 - 8 \cdot 10^5 \theta_3 - 32M_4^{(3)} - 85,33T = -15.360 \quad (12.80)$$



Per a la barra 5, tindrem les mateixes equacions que per a la 3, intercanviant el nus 3 pel 2, el 4 pel 5 i T per $-T$; així

$$-10^5 \theta_2 - 8M_5^{(5)} + 16T = -2.560 \quad (12.81)$$

i

$$10^5 v_4 - 8 \cdot 10^5 \theta_2 - 32M_5^{(5)} + 85,33T = -15.360 \quad (12.82)$$

on hem posat $v_5 = v_4$. Resolent el sistema d'equacions des de la 12.74 a la 12.82, s'obté

$$f_{x1} = 66,04 \text{ kN}$$

$$f_{y1} = 480 \text{ kN}$$

$$M_1 = -110,06 \text{ kNm}$$

$$T = 22,93 \text{ kN}$$

$$f_{x4} = -192,08 \text{ kN}$$

$$M_4^{(3)} = 339,11 \text{ kNm}$$

$$f_{x5} = 126,03 \text{ kN}$$

$$M_5^{(5)} = 400,28 \text{ kNm}$$

$$\theta_2 = -0,0027 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

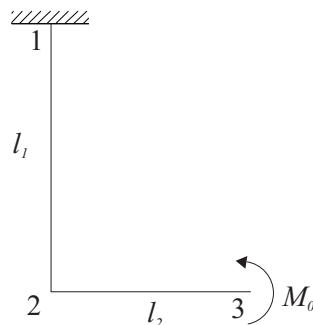
$$\theta_3 = -0,005 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

$$v_4 = -0,067 \text{ m} \downarrow$$

Problema 12.14

Calculeu el gir i el desplaçament dels punts 2 i 3 (fig. 12.61).

Fig. 12.61



Solució:

Les reaccions les tenim a la figura 12.62, on també hi ha dibuixats els eixos globals amb els quals treballarem. Observem que hem pres l'eix Y cap avall per comoditat, amb la qual cosa l'eix Z anirà cap endins.

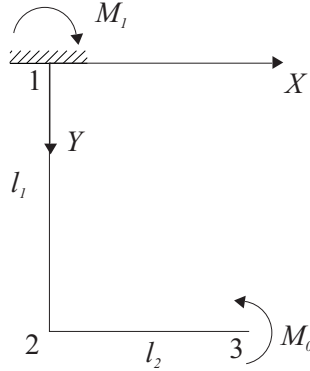


Fig. 12.62

Les incògnites, incloses les reaccions i els graus de llibertat dels nusos, són: la reacció M_1 , el gir i els dos desplaçaments del nus 2, θ_2 , u_2 , v_2 i els del nus 3, θ_3 , u_3 , v_3 . En total, set incògnites. Necessitarem, doncs, set equacions: una de l'estàtica (les altres dues no té sentit aplicar-les) i sis (3×2) de N-B per a les barres.

L'equació de l'estàtica pel que fa a l'equilibri de moments implica

$$M_1 = M_0 \quad (12.83)$$

Les equacions de Navier-Bresse que hem d'utilitzar, en aquest cas, són les generals per al cas bidimensional, sense incloure-hi els esforços normals ni els de cisallament, entre dos punts 1 i 2, i s'escriuen

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 + \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} M_z ds \\ u_2 &= u_1 - \theta_1 (y_2 - y_1) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (y_2 - y) ds \\ v_2 &= v_1 + \theta_1 (x_2 - x_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_z}{EI} (x_2 - x) ds \end{aligned}$$

Per a la barra 1-2, tenint en compte que $s = y$, $\theta_1 = u_1 = v_1 = 0$ i que $M_z = -M_1 = -M_0$ (fig. 12.63), observem que hem pres el moment flector positiu d'acord amb el sentit de l'eix Z

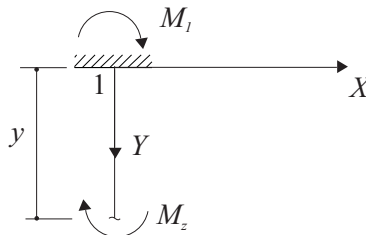


Fig. 12.63

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{l_1} -M_0 dy = \frac{-M_0 l_1}{EI} \quad \curvearrowright$$

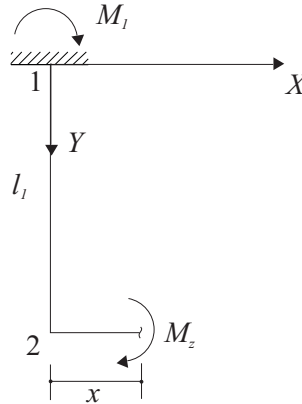


$$u_2 = -\frac{1}{EI} \int_0^{l_1} -M_0(l_1 - y) dy = \frac{M_0 l_1^2}{2EI} \rightarrow$$

$$v_2 = 0$$

Per a la barra 2-3, tenint en compte que $s = x$ i que $M_z = -M_1 = -M_0$ (fig. 12.64),

Fig. 12.64



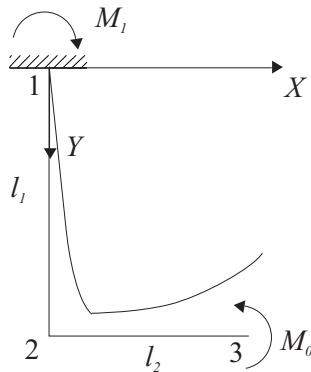
$$\theta_3 = \frac{-M_0 l_1}{EI} + \frac{1}{EI} \int_0^{l_2} -M_0 dx = -\frac{M_0 l_1}{EI} - \frac{M_0 l_2}{EI} \curvearrowright$$

$$u_3 = u_2 = \frac{M_0 l_1^2}{2EI} \rightarrow$$

$$v_3 = \theta_2 l_2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l_2} -M_0(l_2 - x) dx = -\frac{M_0 l_1 l_2}{EI} - \frac{M_0 l_2^2}{2EI} \uparrow$$

Tenint en compte els resultats obtinguts, la deformada de l'estructura és la representada a la figura 12.65

Fig. 12.65







Energia de la deformació

13.1. Treball i energia interna

Vegem ara el treball que fan les forces, les internes i les externes, durant el procés de deformació. No considerem les forces externes volúmiques, com pot ser el propi pes. Si prenem un volum dv , la força feta sobre ell és $\mathbf{f}dv$, essent \mathbf{f} la força sobre la unitat de volum, segons ja vàrem establir a 2.21. En variar el vector desplaçament \mathbf{u} una petita quantitat $\delta\mathbf{u}$, el treball que fa la força \mathbf{f} en el volum dv és

$$f_i \delta u_i dv$$

i, substituint 2.22 i integrant a tot el volum, tindrem

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dv$$

integral que representa el treball total exercit per les forces, tant les externes com les internes, que actuen sobre el cos en un desplaçament infinitesimal δu_i . De l'expressió

$$\frac{\partial (\sigma_{ik} \delta u_i)}{\partial x_k} = \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i$$

obtenim

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dv = \int_V \frac{\partial (\sigma_{ik} \delta u_i)}{\partial x_k} dv - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv$$

i

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dv = \int_S \sigma_{ik} \delta u_i ds_k - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv$$

on la primera integral de la dreta, aplicant-hi el teorema de Stockes, l'hem transformada en una integral sobre la superfície S del cos ja que és la integral volúmica de la divergèn-



cia del vector $\sigma_{ik}\delta u_i$. Atès que sobre la superfície només hi actuen les forces externes, aquesta integral és el treball d'aquestes mentre ha tingut lloc la deformació, que analitzarem més endavant; per tant, deduïm que la segona integral de la dreta és el treball corresponent a les forces internes, és a dir, als esforços interns. Anomenant δw el treball per unitat de volum fet pels esforços interns en un desplaçament diferencial, escriurem

$$\int_V \delta w dv = - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv$$

expressió que es pot escriure com

$$\begin{aligned} \int_V \delta w dv &= - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dv = - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dv \\ &= - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dv = - \int_V \sigma_{ik} \delta u_{ik} dv \end{aligned}$$

és a dir,

$$\delta w = -\sigma_{ik} \delta u_{ik} \quad (13.1)$$

Considerarem que la deformació es produeix d'una manera lenta, de tal manera que, en tot moment, el cos està en equilibri termodinàmic amb l'exterior, és a dir, que el procés de deformació és reversible. En aquestes condicions, la variació infinitesimal de l'energia interna per unitat de volum du del cos és igual a la diferència entre la calor rebuda i el treball efectuat per les forces internes de l'element de volum, és a dir,

$$du = T ds - dw$$

on s és l'entropia per unitat de volum i T és la temperatura. La quantitat u és, doncs, l'energia interna per unitat de volum que anomenarem *densitat d'energia de deformació*, i la quantitat $U = \int_V u dv$, *energia interna* del cos. En un procés sense intercanvi de calor amb l'exterior, tindrem

$$du = \sigma_{ik} du_{ik} \quad (13.2)$$

relació de la qual es dedueix

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial u}{\partial u_{ik}} \quad (13.3)$$

Definim ara una quantitat que ens serà útil més endavant: és la *densitat d'energia complementària de deformació*, que designem per u^* i definim com

$$u^* = -u + \sigma_{ij} u_{ij} \quad (13.4)$$

Derivant respecte al tensor de tensions,

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{\partial u}{\partial \sigma_{kl}} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} u_{ij}$$



aplicant-hi la regla de la cadena $\frac{\partial u}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial u}{\partial u_{mn}} \frac{\partial u_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$ i tenint en compte 13.3,

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = -\sigma_{mn} \frac{\partial u_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} u_{ij}$$

i, canviant els índexs muts m, n per i, j , tindrem

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} u_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jl} u_{ij}$$

i, finalment,

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{kl}} = u_{kl} \quad (13.5)$$

expressió complementària a 13.3.

Obtindrem ara una expressió per la densitat d'energia interna u en funció del tensor de deformacions. Ja hem dir a la introducció que l'estat no deformat d'un cos és aquell en el qual no hi ha forces externes i, per tant, tampoc no hi ha esforços interns. És a dir, per a $u_{ik} = 0$ hem de tenir $\sigma_{ik} = 0$; tenint en compte 13.3, arribem a la conclusió que, si desenvolupem u en potències de u_{ik} , no poden haver-hi a l'expressió termes lineals. Quant als termes de segon grau, podem prendre dos escalars independents del tensor u_{ik} : el quadrat de la suma dels elements diagonals u_{ii}^2 i la suma u_{ik}^2 dels quadrats dels elements del tensor. Així doncs, desenvolupant u en sèries de potències de u_{ik} i quedant-nos solament amb els termes de segon ordre, ja que les deformacions són petites, tindrem

$$u = u_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2 \quad (13.6)$$

les constants λ i μ són les constants de Lamé introduïdes a 5.13. Podem obtenir la llei de Hooke diferenciant l'expressió obtinguda per a u . Per evitar confusions, canviarem la i per l al segon terme de la dreta

$$du = \lambda u_{ll} du_{ll} + 2\mu u_{ik} du_{ik} = \lambda u_{ll} \delta_{ik} du_{ik} + 2\mu u_{ik} du_{ik} = (\lambda u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik}) du_{ik}$$

i, tenint en compte 13.3,

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik} \quad (13.7)$$

que és la llei de Hooke, tal com l'hem introduïda a 5.13; per tant, l'expressió 13.6 establerta per a u és vàlida en règim elàstic lineal (observeu que hem negligit els termes superiors als de segon ordre).

De 13.6, en podem obtenir una altra expressió molt útil en el càlcul d'estructures. Pel fet que u és una funció quadràtica del tensor de deformació, aplicant-hi el teorema d'Euler

$$u_{ik} \frac{\partial u}{\partial u_{ik}} = 2u$$

i, tenint en compte 13.3,

$$u = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} \quad (13.8)$$

Si substituïm 13.7 a 13.4 n'obtenim $u^* = u$, que és l'anomenada *fórmula de Clapeyron*. És a dir, si es compleix la llei de Hooke, la densitat d'energia de deformació i la densitat de energia complementària de deformació són iguals.

Segons 13.7, u_{ik} es pot posar com a combinació lineal de σ_{ik} ; per tant, segons 13.8, deduïm que u també és una funció quadràtica de les σ_{ik} i, aplicant-hi novament el teorema d'Euler,

$$\sigma_{ik} \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ik}} = 2u$$

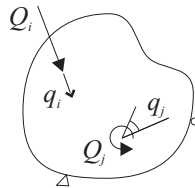
i, tenint en compte novament 13.8, podem escriure

$$u_{ik} = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ik}} \quad (13.9)$$

Fixem-nos que, mentre que 13.3 i 13.5 són relacions vàlides, es compleixi o no la llei de Hooke, 13.9 només ho és si la llei de Hooke es compleix.

Hem analitzat fins ara el treball de les forces internes i les magnituds relacionades amb elles; vegem ara el treball de les forces externes. En elements estructurals, si suposem negligibles les forces volúmiques degudes al propi pes, només tindrem les aplicades directament sobre la superfície. Aquestes poden ser càrregues concentrades o repartides i moments concentrats o repartits, i les anomenarem genèricament Q_i . A cada càrrega generalitzada, hi podem associar un desplaçament generalitzat q_i ; el sentit físic d'aquest desplaçament el veurem més endavant, en analitzar el treball fet per les càrregues generalitzades (fig. 13.1).

Fig. 13.1
Càrregues
generalitzades i
desplaçaments
generalitzats.



En general, el desplaçament d'un punt q_i no depèn solament de la càrrega aplicada en aquell punt sinó també de totes les altres càrregues. En una estructura amb un comportament elàstic, podem suposar que aquesta dependència és lineal, és a dir,

$$q_i = c_{ij} Q_j \quad (13.10)$$

on c_{ij} són els anomenats *coeficients de flexibilitat*. El conjunt de quantitats c_{ij} rep el nom de *matriu de flexibilitat* de l'estructura; més tard es provarà que és una matriu simètrica. Invertint 13.10, podem escriure



$$Q_i = k_{ij}q_j \quad (13.11)$$

els valors k_{ij} s'anomenen *coeficients de rigidesa* i el conjunt de quantitats k_{ij} , *matriu de rigidesa*. De la seva definició, resulta que k_{ij} és la força generalitzada Q_i necessària per produir un desplaçament generalitzat unitari q_j , quan tots els altres desplaçaments generalitzats són zero. Observem que 13.10 i 13.11 impliquen que Q_i va variant gradualment a mesura que es va produint el desplaçament q_i , és a dir, la càrrega no s'hi aplica de cop.

Calculem ara el treball fet per les càrregues externes Q_i durant tot el procés de deformació. Suposem, primer, per facilitar-ne el càlcul, que actua només Q_1 . El treball fet per Q_1 en produir un desplaçament q_1 serà

$$W_E = \int_0^{q_1} Q_1 dq_1 = \int_0^{q_1} k_{11}q_1^2 = \frac{1}{2}Q_1q_1$$

Generalitzant per al cas que hi actuïn totes les càrregues externes Q_i simultàniament, tindrem

$$W_E = \frac{1}{2}Q_iq_i \quad (13.12)$$

i, substituint 13.10 a 13.12,

$$W_E = \frac{1}{2}Q_ic_{ij}Q_j$$

o bé, en notació matricial,

$$W_E = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \mathbf{c} \mathbf{Q}$$

on $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ és el vector de càrregues generalitzades i n és el nombre de càrregues i, per tant, de desplaçaments generalitzats. Substituint 13.11 a 13.12, tindrem, per a W_E ,

$$W_E = \frac{1}{2}k_{ij}q_jq_i$$

o bé, en notació matricial,

$$W_E = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{k} \mathbf{q} \quad (13.13)$$

on $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ és el vector de desplaçaments generalitzats.

El *teorema de l'energia*, aplicat a tot el cos durant tot el procés de deformació, el podem escriure, atès que tant la situació inicial com la final són d'equilibri, com

$$W_E = U \quad (13.14)$$

essent U l'energia interna en l'estat final d'equilibri. Veurem un exemple d'aplicació directa del teorema de l'energia en els problemes 13.6 i 13.8.

L'equació 13.12 ens permet atribuir un significat físic al desplaçament generalitzat q_i : Si la càrrega generalitzada és una força puntual, q_i representa el desplaçament de l'estructura en el punt d'aplicació de la força i en la direcció d'aquesta; si la càrrega generalitzada és un moment, q_i correspon a un gir en la direcció del vector moment. A més, com que 13.12 és una equació escalar i no vectorial, un signe positiu de q_i significa *solament* que va en el mateix sentit que Q_i . Això és molt important en la resolució de problemes, com veurem.

Per deduir el sentit físic del desplaçament generalitzat corresponent a una càrrega repartida en una superfície S , observem que el treball efectuat per aquesta el podem escriure com

$$W = \frac{1}{2} \int_S p y ds$$

essent p la càrrega per unitat de superfície i y la component del desplaçament en la direcció de p (fig. 13.2); substituint a 13.12,

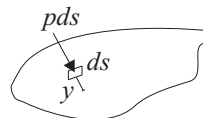
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_i q_i &= \frac{1}{2} \int_S p y ds \\ Q_i q_i &= \int_S p y ds \\ q_i \int_S p ds &= \int_S p y ds \end{aligned}$$

tenim, doncs, per a q_i ,

$$q_i = \frac{\int_S p y ds}{\int_S p ds} \quad (13.15)$$

equació que indica que q_i és el desplaçament mitjà ponderat per p , en la direcció de la càrrega, dels punts on s'aplica la càrrega repartida. Per un raonament similar, arribem a la conclusió que, si el que tenim és un moment repartit, el desplaçament generalitzat associat correspon al gir mitjà ponderat en el punt on s'aplica aquest moment. Per un altra banda, observem que, en cas que la càrrega sigui uniformement repartida, q_i correspon al desplaçament o gir mitjà dels punts on està aplicada la càrrega.

Fig. 13.2
Desplaçament
generalitzat.



13.2. Energia d'elements estructurals

Vegem, a continuació, el càlcul de l'energia interna per a diversos elements estructurals simples. Definim uns eixos locals de la manera habitual, és a dir, que l'eix \bar{X} coincideix amb l'eix de la barra i els eixos \bar{Y} i \bar{Z} són eixos principals d'inèrcia de la secció transversal, i uns eixos globals X, Y, Z que serviran per identificar la secció transversal.



13.2.1. Barra sotmesa a esforços normals

Comencem pel més senzill de tots, que és un element recte que suporta únicament esforços normals. Si l és la longitud de la barra, N l'esforç normal i A l'àrea de la secció transversal, aplicant 13.8 podem expressar U en termes de l'esforç normal com

$$U = \int_V \frac{\sigma_{\bar{x}} u_{\bar{x}}}{2} dv = \int_V \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{2E} = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx$$

o bé, en termes de la deformació,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l u_{\bar{x}} EA u_{\bar{x}} dx \quad (13.16)$$

el coeficient EA és la rigidesa de la barra a la tracció o compressió.

També podem expressar l'energia en funció dels desplaçaments dels extrems. Si la barra està sotmesa únicament a forces pels seus extrems i i j , siguin f_i, f_j les forces normals als extrems i u_i, u_j els seus desplaçaments (fig. 13.3), l'energia interna U de la barra la podem expressar com

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{\bar{x}} u_{\bar{x}} dv = \frac{1}{2} \int_0^l u_{\bar{x}} EA u_{\bar{x}} dx = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_j - u_i)^2 = \frac{1}{2} k (u_j - u_i)^2 \quad (13.17)$$

on $k = \frac{EA}{l}$.

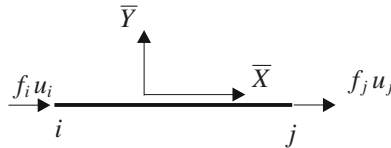


Fig. 13.3
Barra sotmesa a esforços normals.

13.2.2. Barra sotmesa a moments flectors

L'element següent que analitzem és una barra recta que suporta moments flectors, esforços de cisallament i moments torsors. Per calcular-ne l'energia interna, considerarem per separat l'energia associada a cada un dels esforços.

En cas que la barra suporti moments flectors únicament, suposem que aquests actuen en la direcció de l'eix principal d'inèrcia \bar{z} (fig. 13.4).

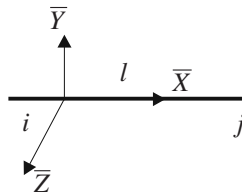


Fig. 13.4
Barra sotmesa a moments flectors.



En aquest cas, l'estat tensional és, segons les fórmules obtingudes de la flexió

$$\sigma_{\bar{x}} = -\frac{M_{\bar{z}}}{I_{\bar{z}}} \bar{y}$$

i totes les altres components del tensor de tensions, zero.

Així, tindrem, per a l'energia interna

$$U = \int_V \frac{1}{2E} \sigma_{\bar{x}}^2 dv$$

i, substituint,

$$U = \int_V \frac{1}{2E} \frac{M_{\bar{z}}^2 \bar{y}^2}{I_{\bar{z}}^2} dv = \int_0^l \frac{M_{\bar{z}}^2}{2EI_{\bar{z}}} dx$$

o bé, en termes de la curvatura $\kappa = \frac{M_{\bar{z}}}{EI_{\bar{z}}}$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_{\bar{z}} \kappa^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \kappa EI_{\bar{z}} \kappa dx \quad (13.18)$$

el producte $EI_{\bar{z}}$ és la rigidesa de la barra a la flexió.

Si la barra està sotmesa a esforços de cisallament, suposem en la direcció \bar{Y} , l'estat tensional és, segons la llei de Colignon (8.6), i suposant que la tensió de cisallament és la mateixa per a tots els punts d'una línia paral·lela a l'eix \bar{Z} ,

$$\sigma_{\bar{y}\bar{x}} = \frac{QS_0^*}{I_{\bar{z}} b_0}$$

i totes les altres components del tensor de tensions, zero.

Així, l'energia interna és

$$U = \int_V \frac{1}{2G} \sigma_{\bar{y}\bar{x}}^2 dv = \int_V \frac{1}{2G} \frac{Q^2 S_0^{*2}}{I_{\bar{z}}^2 b_0^2} dv = \int_0^l \frac{Q^2}{2GA_{s\bar{y}}} dx \quad (13.19)$$

on $A_{s\bar{y}}$ és l'àrea reduïda en la direcció \bar{Y} definida per

$$A_{s\bar{y}} = \frac{I_{\bar{z}}^2}{\int_A \frac{S_0^{*2}}{b_0^2} dA}$$

L'energia interna d'un element diferencial de la barra de gruix dx és

$$dU = \frac{Q^2}{2GA_{s\bar{y}}} dx \quad (13.20)$$



que podem igualar, d'acord amb 13.14, al treball total que fan les tensions de cisallament en l'element diferencial de barra. Si adoptem el punt de vista de la figura 2.4c, només cal considerar el treball que fan les tensions de cisallament a les dues cares perpendiculars a la línia de centroides; el treball que fan les tensions recíproques que actuen en els plans paral·lels a la línia de centroides ja hi queda inclòs. Tenint en compte 13.12, escriurem

$$\frac{1}{2} Q q_i = \frac{Q^2}{2GA_{s\bar{y}}} dx \quad (13.21)$$

on q_i és el desplaçament generalitzat relatiu corresponent a la tensió de cisallament, és a dir, segons 13.15, el desplaçament relatiu mitjà ponderat provocat per les tensions de cisallament en la seva direcció; el designarem per $d\bar{u}$ i escriurem, doncs,

$$d\bar{u} = \frac{Q}{GA_{s\bar{y}}} dx \quad (13.22)$$

El quocient $d\bar{u}/dx$ és la *deformació angular mitjana ponderada* dels punts de la secció transversal, que designem per $\bar{\gamma}$ (fig. 13.5), i està definida per 13.15

$$\bar{\gamma} = \frac{\int_S \tau \gamma ds}{\int_S \tau ds} \quad (13.23)$$

Tindrem, doncs,

$$\bar{\gamma} = \frac{Q}{GA_{s\bar{y}}} \quad (13.24)$$

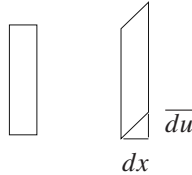


Fig. 13.5
Deformació per
cisallament.
Desplaçament mitjà
ponderat.

Tenint en compte 13.24, podem escriure l'energia U com

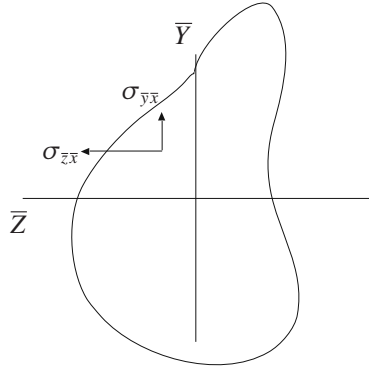
$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{\gamma} GA_{s\bar{y}} \bar{\gamma} dx \quad (13.25)$$

El producte $GA_{s\bar{y}}$, per similitud amb el cas de la tracció o compressió i amb el de la flexió, s'anomena *rigidesa de la barra al cisallament*. Al capítol següent s'analitza el desplaçament per cisallament en barres rectes.

13.2.3. Barra sotmesa a moments torsors

En tercer lloc, considerem una barra de longitud l i secció qualsevol, sotmesa a un moment torsor $M_{\bar{x}}$ constant al llarg de la barra. Atès que, segons 9.3, les úniques tensions diferents de zero són $\sigma_{\bar{y}\bar{x}}$ i $\sigma_{\bar{x}\bar{y}}$ (fig. 13.6), la densitat d'energia serà

Fig. 13.6
Secció d'una barra
sotmesa a torsió.



$$u = \sigma_{yx} u_{yx} + \sigma_{zx} u_{zx} = \frac{1}{2G} (\sigma_{yx}^2 + \sigma_{zx}^2)$$

Substituint 9.5,

$$\sigma_{yx} = 2G\theta' \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}, \quad \sigma_{zx} = -2G\theta' \frac{\partial \chi}{\partial \bar{y}}$$

i, tindrem

$$u = 2G\theta'^2 \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] = 2G\theta'^2 (\Delta \chi)^2$$

on Δ és el gradient bidimensional.

Així, l'energia U de la barra és

$$U = \int_0^l \left(\int_A 2G\theta'^2 (\Delta \chi)^2 dA \right) dx$$

on A és la superfície de la secció transversal. Podem obtenir una expressió per a U semblant formalment a les obtingudes per a la resta d'esforços, tracció-compensió, flexió i cisallament, definint C per

$$C \equiv 4G \int_A (\Delta \chi)^2 dA \quad (13.26)$$

Així, tindrem per a U ,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \theta' C \theta' dx_3 \quad (13.27)$$

Per semblança amb la resta d'esforços, el paràmetre C s'anomena *rigidesa de la barra a la torsió*.



13.3. Principi del treball virtual

Ara enunciem un teorema o principi molt útil en el càlcul d'estructures. Imaginem que tenim el cos ja deformat i hi permetem una petita deformació addicional δq_i sense que les càrregues externes canviïn; una deformació d'aquest tipus s'anomena *deformació virtual*, per diferenciar-la d'una deformació real, que és la que s'ha analitzat a l'apartat anterior. Suposant que passem d'una situació d'equilibri en repòs a una altra també d'equilibri en repòs, el teorema de l'energia implica que el treball de les forces externes més el de les internes ha de ser zero.

$$\delta W_E + \delta W_I = 0 \quad (13.28)$$

Fixem-nos que els treballs són els efectuats per les càrregues i les tensions reals en una deformació virtual.

El treball de les forces externes δW_E , el podem escriure en termes de les càrregues generalitzades Q_i i dels desplaçaments generalitzats δq_i com

$$\delta W_E = Q_i \delta q_i \quad (13.29)$$

ja que les Q_i les considerem constants durant la deformació virtual.

El treball de les forces internes ve donat per 13.1, o bé per 13.2, en termes de la densitat d'energia de deformació

$$\delta W_I = - \int_V \sigma_{ij} \delta u_{ij} dv = - \int_V \delta u dv = - \delta \int_V u dv$$

Tenint en compte que la darrera integral és l'energia de deformació U de tot el cos, escriurem

$$\delta W_I = -\delta U$$

Així, 13.28 la podem escriure com

$$\delta W_E = \delta U \quad (13.30)$$

expressió que rep el nom de *principi del treball virtual*.

Si tenim en compte 13.29, podem escriure aquest principi en la forma

$$\delta W_E = Q_k \delta q_k = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{ij} dv \quad (13.31)$$

on hem canviat la i per la k al membre de l'esquerra per evitar confusions.

Suposem ara que sobre l'estructura permetem un únic desplaçament virtual en un punt que anomenem simplement δq . La força generalitzada aplicada en aquest punt que produeix aquest desplaçament l'anomenem Q . Si l'estructura té un comportament elàstic lineal, δu_{ij} serà proporcional a δq , és a dir,



$$\delta u_{ij} = \bar{u}_{ij} \delta q$$

\bar{u}_{ij} representa la distribució de deformacions provocada per l'aplicació d'un desplaçament unitari en el punt en qüestió i en la direcció de Q . Introduint aquesta darrera expressió a 13.31, tindrem

$$Q \delta q = \int_V \sigma_{ij} \bar{u}_{ij} \delta q dv$$

i, eliminant δq ,

$$Q = \int_V \sigma_{ij} \bar{u}_{ij} dv$$

expressió que ens permet calcular Q i que es coneix amb el nom de *teorema del desplaçament unitat*.

13.4. Principi del treball virtual complementari

En el principi del treball virtual, hem calculat el treball que fan les càrregues i les tensions reals en una deformació virtual; ara pretenem fer-ho a l'inrevés: calcularem el treball que farien unes càrregues virtuals δQ_i i unes tensions també virtuals $\delta \sigma_{ij}$ per arribar a l'estat real de deformació, representat pels desplaçaments generalitzats q_i . Aquest conjunt de càrregues virtuals pot ser arbitrari, amb l'única condició que, sota aquest conjunt de càrregues, l'estructura ha d'estar en equilibri. Observem que les càrregues virtuals acompanyen les reals en el procés de deformació.

El treball que fan les δQ_i l'anomenem *treball virtual complementari* de les forces externes i el designem per δW_E^* .

$$\delta W_E^* = \delta Q_i q_i \quad (13.32)$$

El treball de les forces internes el podem calcular per similitud amb 13.1, atès que u_{ij} també són quantitats molt petites, com

$$\delta W_I^* = \int_V -\delta \sigma_{ij} u_{ij} dv \quad (13.33)$$

aplicant-hi 13.5,

$$\delta W_I^* = - \int_V \delta u^* dv = - \delta \int_V u^* dv$$

i, anomenant *energia complementària de deformació* U^* la darrera integral, escriurem

$$\delta W_I^* = -\delta U^*$$

En el procés de deformació, hi han intervingut tant les forces i tensions reals com les virtuals; el treball total, segons el teorema de l'energia, ha de ser zero, ja que passem d'una situació d'equilibri en repòs a una altra també d'equilibri en repòs. El treball de



les forces i tensions reals és zero; per tant, el de les virtuals també ho ha de ser, és a dir,

$$\delta W_E^* + \delta W_I^* = 0$$

o bé

$$\delta W_E^* = \delta U^* \quad (13.34)$$

enunciat que es coneix amb el nom de *principi del treball virtual complementari*.

Si tenim en compte 13.32 i 13.33, podem escriure aquest principi en la forma

$$\delta Q_k q_k = \int_V \delta \sigma_{ij} u_{ij} dv \quad (13.35)$$

on hem canviat la i per la k al membre de l'esquerra per evitar confusions.

Suposem ara que sobre l'estructura s'aplica una única força virtual generalitzada δQ en un punt, a més de les reaccions induïdes als suports de l'estructura amb l'exterior. El desplaçament generalitzat que aquesta força produeix en la seva direcció l'anomenem q . (Recordem que aquest desplaçament generalitzat pot ser una translació o un gir, depenent de si la càrrega generalitzada és una força o un moment, respectivament). Si l'estructura té un comportament elàstic lineal, $\delta \sigma_{ij}$ serà proporcional a δQ , és a dir,

$$\delta \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} \delta Q \quad (13.36)$$

$\bar{\sigma}_{ij}$ representa la distribució de tensions virtuals provocada per l'aplicació d'una força virtual unitària en el punt en qüestió i en la direcció de q . Observem que les unitats de $\bar{\sigma}_{ij}$ depenen de si la càrrega virtual aplicada és una força o un moment.

Introduint aquesta darrera expressió a 13.35, i tenint en compte que les reaccions no fan treball, ja que estem considerant una deformació real, tindrem

$$\delta Q q = \int_V \bar{\sigma}_{ij} \delta Q u_{ij} dv$$

i, eliminant δQ ,

$$q = \int_V \bar{\sigma}_{ij} u_{ij} dv \quad (13.37)$$

En el cas habitual d'una barra de longitud l en la qual hi hagi esforços de tracció-compensió N i moments flectors M_z , tenint en compte les equacions de les tensions i deformacions per a aquests casos i aplicant-hi el principi de superposició, tindrem

$$q = \int_V \bar{\sigma}_{ij} u_{ij} dv = \int_V \frac{\bar{N}}{A} \frac{N}{AE} dA dx + \int_V \frac{\bar{M}_z}{I_z} \bar{y} \frac{M_z}{EI_z} \bar{y} dA dx$$

on \bar{N} és l'esforç normal virtual i \bar{M}_z , el moment flector virtual en aplicar una força virtual unitària en el punt en qüestió i en la direcció de q . Tenint en compte que $\int_A dA = A$ i que $\int_A \bar{y}^2 dA = I_z$,



$$q = \int_l \frac{\bar{N}N}{EA} dx + \int_l \frac{\bar{M}_z M_z}{EI_z} dx \quad (13.38)$$

Es poden deduir expressions equivalents per a d'altres esforços. L'equació 13.37 és important, ja que ens permet calcular q d'una manera fàcil en moltes ocasions, i es coneix amb el nom de *teorema de la càrrega unitat*. Quant a dimensions, observem que, si la càrrega virtual aplicada és una força, llavors el desplaçament generalitzat és un desplaçament i, per tant, \bar{N} no té unitats i \bar{M}_z té unitats de longitud. Si la càrrega virtual aplicada és un moment, llavors el desplaçament generalitzat és un gir i, per tant, \bar{N} té unitats d'1/longitud i \bar{M}_z no té unitats. En els problemes, l'aplicació d'aquesta expressió l'anomenarem *mètode de la càrrega unitat*.

13.5. Teoremes recíprocs

A partir dels teoremes del treball virtual i del treball virtual complementari, podem deduir dos enunciats més, útils també en el càlcul d'estructures; vegem-ho. Suposem una estructura sotmesa a un sistema de forces generalitzades Q_i , que produeix unes tensions σ_{ij} i unes deformacions u_{ij} . Considerem també un segon sistema \bar{Q}_i , que produeix unes tensions $\bar{\sigma}_{ij}$ i unes deformacions \bar{u}_{ij} . Si imaginem que el sistema Q actua primer i, quan l'estructura està deformada, es permet una deformació virtual addicional coincident amb la produïda per les \bar{Q}_i , el principi del treball virtual estableix que

$$Q_i \bar{q}_i = \int_V \sigma_{ij} \bar{u}_{ij} dv \quad (13.39)$$

Si suposem que els dos sistemes de forces actuen en ordre invers, podem escriure

$$\bar{Q}_j q_j = \int_V \bar{\sigma}_{ij} u_{ij} dv \quad (13.40)$$

Si els cossos que formen l'estructura són linealment elàstics, la tensió σ_{ij} està relacionada amb la deformació u_{ij} , segons la llei de Hooke generalitzada 5.10

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{kl} \quad (13.41)$$

De manera semblant a 13.41, també podem escriure

$$\bar{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \bar{u}_{kl}$$

Així doncs, 13.39 i 13.40 les podem escriure com

$$Q_i \bar{q}_i = \int_V E_{ijkl} u_{kl} \bar{u}_{ij} dv$$

$$\bar{Q}_j q_j = \int_V E_{ijkl} \bar{u}_{kl} u_{ij} dv$$

Tenint en compte que $E_{ijkl} = E_{klij}$, podem escriure finalment

$$Q_i \bar{q}_i = \bar{Q}_j q_j \quad (13.42)$$



que constitueix l'enunciat del *teorema recíproc de Betti*. Com a cas particular del teorema de Betti, suposem que el sistema de forces es redueix a una de sola, a més, naturalment, de les reaccions externes. Si fem $Q_i = \bar{Q}_j = 1$, de 13.42 tindrem

$$\bar{q}_i = q_j$$

ara bé, \bar{q}_i és el desplaçament en el punt i en la direcció de Q_i degut a la força unitària \bar{Q}_j , i això és el coeficient de flexibilitat c_{ij} , com ja vàrem enunciar. Així mateix, q_j és, en aquest cas, el coeficient c_{ji} ; per tant,

$$c_{ij} = c_{ji}$$

resultat que es coneix amb el nom de *lleis de Maxwell* i demostra que *la matriu de flexibilitat i, per tant, la de rigidesa són simètriques*.

13.6. Principi de l'energia potencial total mínima

Generalment, les forces externes deriven d'una energia potencial, que anomenem V_E ; en aquests casos, el principi del treball virtual 13.30 es pot expressar de la manera següent:

$$\delta U - \delta W_E = 0$$

$$\delta U + \delta V_E = \delta(U + V_E) = 0$$

on $\delta V_E = -\delta W_E$; definint l'*energia potencial total* $\Pi \equiv U + V_E$, escriurem simplement

$$\delta \Pi = 0 \quad (13.43)$$

expressió que es coneix amb el nom de *principi de l'energia potencial total mínima*. Atès que 13.43 deriva del principi del treball virtual i, per tant, són les deformacions i els desplaçaments els que varien, mentre que les forces es mantenen constants, podem enunciar aquest principi de la manera següent: *Quan el cos és sotmès a un sistema de forces donat, el camp de desplaçaments en l'equilibri és aquell que fa que l'energia potencial total sigui mínima*.

En termes de les càrregues generalitzades, segons 13.29, la variació d'energia potencial és $\delta V_E = -Q_i \delta q_i$; per tant, tenint en compte que les càrregues es mantenen constants durant el procés de deformació virtual,

$$V_E = -Q_i q_i \quad (13.44)$$

13.7. Principi de l'energia potencial total complementària mínima

El principi del treball virtual complementari el podem escriure com

$$\delta U^* - \delta W_E^* = 0$$

$$\delta U^* + \delta V_E^* = \delta(U^* + V_E^*) = 0$$



on $\delta V_E^* = -\delta W_E^*$; definint l'energia potencial total complementària $\Pi^* \equiv U^* + V_E^*$, escriurem simplement

$$\delta \Pi^* = 0 \quad (13.45)$$

expressió que es coneix amb el nom de *principi de l'energia potencial total complementària mínima*. Atès que 13.45 deriva del principi del treball virtual complementari i, per tant, són les forces i les tensions internes les que varien, mentre que els desplaçaments es mantenen constants, podem enunciar aquest principi de la manera següent: *Quan el cos és sotmès a un sistema de desplaçaments donat, el camp de forces i tensions en l'equilibri és aquell que fa que l'energia potencial total complementària sigui mínima.*

En termes de les càrregues generalitzades, segons 13.32, la variació d'energia potencial complementària és $\delta W_E^* = -\delta Q_i q_i$; per tant, tenint en compte que els desplaçaments es mantenen constants durant el procés de deformació virtual,

$$V_E^* = -Q_i q_i \quad (13.46)$$

13.8. Teoremes de Castigliano

Del principi de l'energia potencial total mínima i del de l'energia potencial total complementària mínima es poden derivar dos teoremes, enunciats per Castigliano, que permeten calcular les forces i els desplaçaments generalitzats. L'equació 13.43 la podem escriure, tenint en compte 13.44, com

$$\delta(U - Q_i q_i) = 0$$

Desenvolupant el variacional, i tenint en compte que $U(q_i)$ i que les Q_i es mantenen constants,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i - Q_i \delta q_i &= 0 \\ \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i &= 0 \end{aligned}$$

on les i van sumades. Si Q_i és l'única força generalitzada que fa treball en la deformació virtual, el terme entre parèntesis ha de ser zero, és a dir,

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots$$

expressió que rep el nom de *primer teorema de Castigliano*.

L'equació 13.45 la podem escriure, tenint en compte 13.46, com

$$\delta(U^* - Q_i q_i) = 0$$

Desenvolupant el variacional, i tenint en compte que $U^*(Q_i)$ i que les q_i es mantenen constants,



$$\frac{\partial U^*}{\partial Q_i} \delta Q_i - q_i \delta Q_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial U^*}{\partial Q_i} - q_i \right) \delta Q_i = 0$$

on les i van sumades. Si δQ_i és l'única força generalitzada que fa treball en la deformació virtual complementària, el terme entre parèntesis ha de ser zero, és a dir,

$$\frac{\partial U^*}{\partial Q_i} = q_i \quad i = 1, 2, \dots$$

expressió que rep el nom de *teorema d'Engesser* i és vàlida per a qualsevol cos dins el límit elàstic, sigui lineal o no. Si, a més, el cos té un comportament elàstic lineal, $U^* = U$; per tant, podem escriure

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = q_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (13.47)$$

expressió que es coneix amb el nom de *segon teorema de Castigliano*. Fixem-nos que els teoremes de Castigliano no ens permeten calcular de forma immediata les forces o els desplaçaments generalitzats en els casos en què hi hagi desplaçaments de sòlid rígid, com ara assentaments. El motiu és que, en aquests casos, les reaccions en aquests punts també fan treball i no es compleix el requisit exigít en la deducció dels teoremes, en el sentit que la força o el desplaçament calculat han de ser els únics que intervinguin en el treball que fan les càrregues externes.

13.9. Problemes

Gairebé tots els problemes es resoldran aplicant el *mètode de la càrrega unitat* ja que és un procediment molt potent i sistemàtic per calcular desplaçaments, girs i reaccions hiperestàtiques. Recordem que l'aplicació d'aquest mètode es basa en la utilització d'un conjunt de càrregues virtuals que l'única condició que ha de satisfer és que, sota aquest conjunt de càrregues, l'estructura ha d'estar en equilibri.

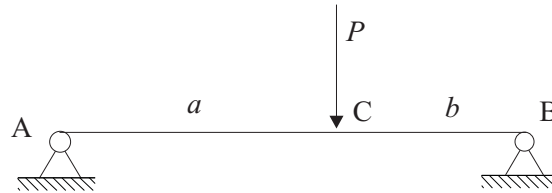
Per al càlcul de les integrals corresponents als mètodes energètics, podem prendre els eixos més adequats en cada tram de barra, ja que les equacions són escalars, no vectorials. Atès que tots els exercicis correspondran al cas bidimensional i les barres seran rectes, prendrem els eixos globals en cada tram de barra, de manera que l'eix X coincideixi amb l'eix de la barra i amb un sentit arbitrari, que no té per què coincidir en els diversos trams.

Problema 13.1

Calculeu el desplaçament vertical i el gir de la secció C de la barra de la figura 13.7. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.



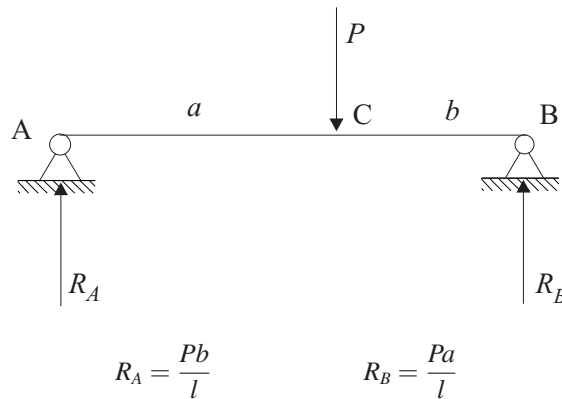
Fig. 13.7



Solució:

Aplicant les equacions de l'estàtica a la barra n'obtenim les reaccions externes

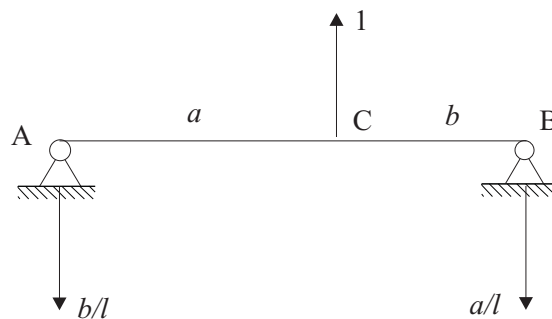
Fig. 13.8



on hem fet $a + b = l$.

Per calcular el desplaçament vertical del punt C, v_C , apliquem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap amunt, aplicada al punt C, i les corresponents reaccions en A i B (fig. 13.9),

Fig. 13.9



Com que les reaccions virtuals no fan treball, podem escriure

$$v_C = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual.



Els moments flectors virtuals seran (fig. 13.10)

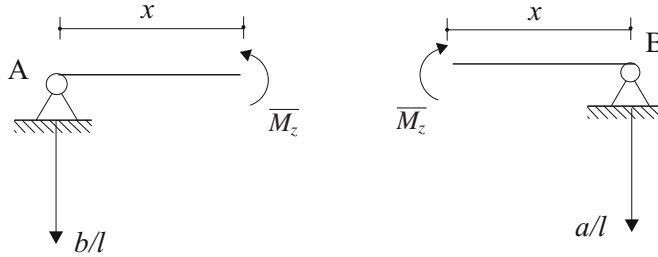


Fig. 13.10

$$\overline{M}_z = \begin{cases} -\frac{bx}{l} & \text{al tram AC} \\ -\frac{ax}{l} & \text{al tram CB} \end{cases}$$

Observem que hem pres la x en diferent sentit a les dues regions. Això ho podem fer, segons ja hem dit, perquè que un resultat positiu a la integral significa, simplement, que el desplaçament generalitzat té el mateix sentit que la càrrega virtual aplicada. Això és així perquè les equacions energètiques no són vectorials sinó escalars.

Els moments flectors reals seran (fig. 13.11)

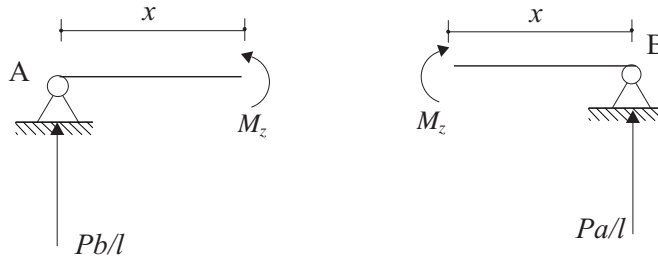


Fig. 13.11

$$M_z = \begin{cases} \frac{Pbx}{l} & \text{al tram AC} \\ \frac{Pax}{l} & \text{al tram CB} \end{cases}$$

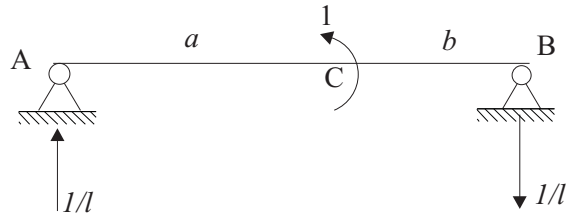
i, substituint,

$$v_C = -\int_0^a \frac{Pb^2x^2}{EI l^2} dx - \int_0^b \frac{Pa^2x^2}{EI l^2} dx = -\frac{Pb^2a^2}{3EI}$$

El resultat negatiu ens indica que el punt C baixa, ja que hem aplicat la càrrega virtual cap amunt.

Per calcular el gir del punt C, θ_C , prenem com a conjunt de càrregues virtuals un moment unitari antihorari, aplicat al punt C, i les corresponents reaccions en A i B (fig. 13.12)

Fig. 13.12



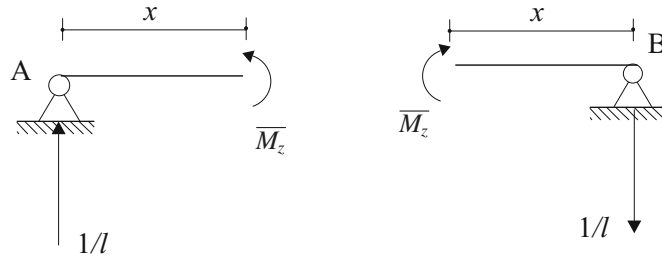
Com que les reaccions virtuals no fan treball, podem escriure

$$\theta_C = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual.

Els moments flexors virtuals seran (fig. 13.13)

Fig. 13.13



$$\overline{M}_z = \begin{cases} \frac{x}{l} & \text{al tram AC} \\ -\frac{x}{l} & \text{al tram CB} \end{cases}$$

Els moments flexors reals seran els mateixos que en el cas anterior, és a dir,

$$M_z = \begin{cases} \frac{Pbx}{l} & \text{al tram AC} \\ \frac{Pax}{l} & \text{al tram CB} \end{cases}$$

i, substituint,

$$\theta_C = \int_0^a \left(\frac{Pbx^2}{l^2 EI} \right) dx + \int_0^b \left(-\frac{Pax^2}{l^2 EI} \right) dx = \frac{Pab}{3lEI} (a - b)$$

Per $a > b$, el resultat és positiu. Això ens indica que el punt C girarà, en aquest cas, en sentit antihorari ja que hem aplicat la càrrega virtual en aquest sentit.



Problema 13.2

Calculeu el desplaçament vertical i el gir de la secció B de la barra de la figura 13.14. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

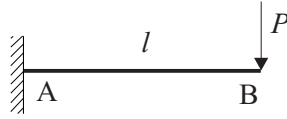


Fig. 13.14

Solució:

Aplicarem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Per calcular el desplaçament vertical v_B del punt B, prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap amunt, aplicada al punt B, i les reaccions corresponents al punt A (fig. 13.15). Les reaccions no les hem dibuixades, ja que no les utilitzarem.

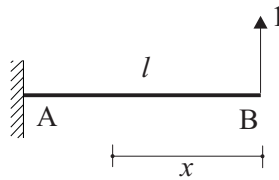


Fig. 13.15

Tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, escriurem

$$v_B = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual.

El moment flector virtual és (fig. 13.16)

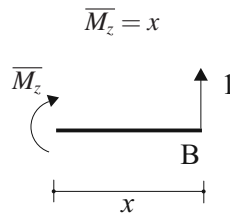


Fig. 13.16

i el moment flector real (fig. 13.17),

$$M_z = -Px$$

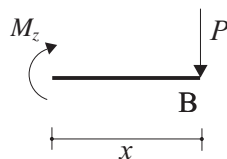


Fig. 13.17

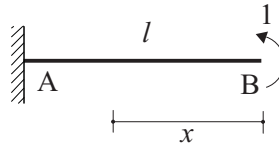
i, substituint,

$$v_B = \int_0^l \frac{-Px^2}{EI} dx = \frac{-Pl^3}{3EI}$$

És a dir, un desplaçament cap avall, ja que la càrrega virtual l'hem aplicada cap amunt.

Per calcular el gir θ_B del punt B, prenem com a conjunt de càrregues virtuals un moment flector virtual unitari antihorari, aplicat al punt B, i les reaccions corresponents al punt A (fig. 13.18).

Fig. 13.18



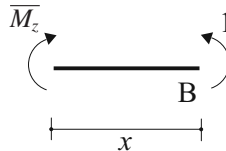
Tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, escriurem

$$\theta_B = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

El moment flector virtual és (fig. 13.19)

$$\overline{M}_z = 1$$

Fig. 13.19



i el moment flector real és el mateix d'abans

$$M_z = -Px$$

i, substituint,

$$\theta_B = -\frac{1}{EI} \int_0^l Px dx = \frac{-Pl^2}{2EI}$$

És a dir, un gir horari, ja que el moment virtual l'hem pres antihorari.

Problema 13.3

Calculeu la deformada de la barra de la figura 13.20. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

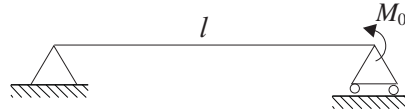


Fig. 13.20

Solució:

Aplicarem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Aplicant-hi l'estàtica, n'obtenim les reaccions, que seran les indicades a la figura 13.21

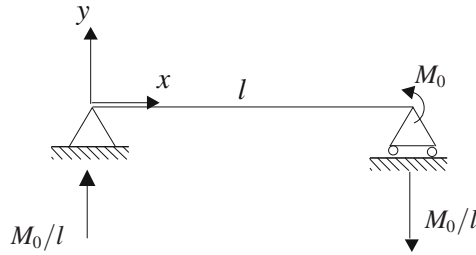


Fig. 13.21

Per calcular el desplaçament vertical v_x en una secció qualsevol, situada a una distància x de l'extrem esquerre de la barra, prendrem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega virtual unitària cap amunt en aquesta secció i les reaccions corresponents (fig. 13.22).

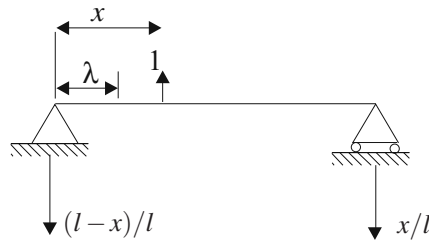


Fig. 13.22

Com que les reaccions virtuals no fan treball, podem escriure

$$v_x = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} d\lambda$$

on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual. Observem que hem anomenat λ la variable d'integració per distingir-la de la x .

El moment flector real és

$$M_z = \frac{M_0 \lambda}{l}$$

i el moment flector virtual,

$$\overline{M}_z = \begin{cases} -\frac{l-x}{l} \lambda & 0 < \lambda < x \\ \frac{x}{l} (\lambda - l) & x < \lambda < l \end{cases}$$

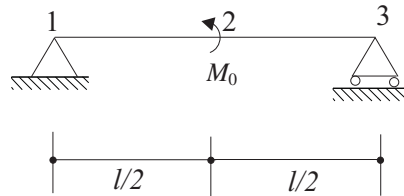
Per tant,

$$v_x = - \int_0^x -\frac{l-x}{l} \lambda \frac{M_0 \lambda}{l} d\lambda + \int_x^l \frac{x}{l} (\lambda - l) \frac{M_0 \lambda}{l} d\lambda = \frac{M_0 x}{6EI} \left(\frac{x^2}{l} - l \right)$$

Problema 13.4

Calculeu el gir dels nusos 1, 2, 3 i la fletxa del nus 2 de la barra de la figura 13.23 i dibuixeu-ne, de forma aproximada, la deformata.

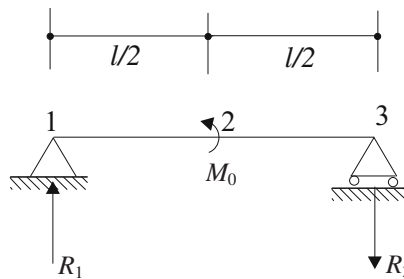
Fig. 13.23



Solució:

Aplicant les equacions de l'estàtica a la barra n'obtenim les reaccions externes (fig. 13.24)

Fig. 13.24

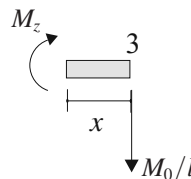
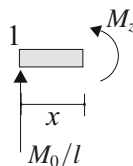


$$R_1 = R_3 = M_0/l$$

Per aplicar el teorema de la càrrega unitat, necessitem primerament els moments reals, que seran sempre els mateixos per les diferents càrregues virtuals que aplicarem. Per a la regió entre 1 i 2, tenim (fig. 13.25) $M_z = (M_0/l)x$ i, per la regió entre 2 i 3 (fig. 13.26), $M_z = -(M_0/l)x$

Fig. 13.25

Fig. 13.26





Per calcular θ_1 , prendrem com a conjunt de càrregues virtuals un moment unitari antihorari al punt 1 i les reaccions virtuals corresponents, que calculem aplicant-hi l'estàtica. El tenim representat a la figura 13.27.

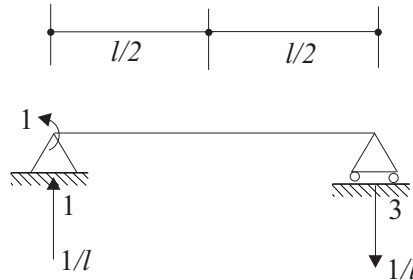


Fig. 13.27

El moment virtual podem expressar-lo amb una única equació per tota la barra, és a dir, podem considerar una sola regió. Però, perquè les x coincideixin amb les dels moments reals, prendrem les mateixes dues regions que varem prendre llavors. Per a la regió entre 1 i 2, tenim (fig. 13.28) $M_z = x/l - 1$ i, per a la regió entre 2 i 3 (fig. 13.29), $M_z = -x/l$

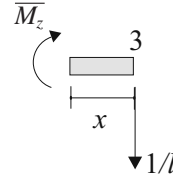
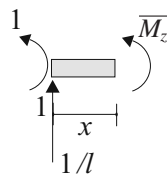


Fig. 13.28

Fig. 13.29

Com que les reaccions virtuals no fan treball, podem escriure

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

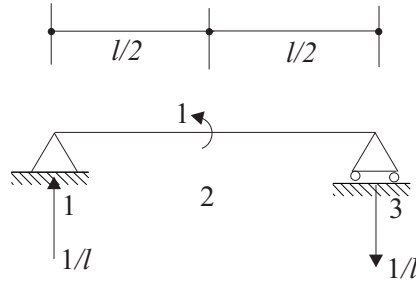
on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual. Substituint els moments reals i virtuals calculats i separant en dues integrals, una per a cada regió,

$$\theta_1 = \int_0^{l/2} \frac{(x/l - 1)(M_0 x/l)}{EI} + \int_0^{l/2} \frac{(-x/l)(-M_0 x/l)}{EI} = \frac{-M_0 l}{24EI}$$

El signe negatiu indica que és un gir horari, ja que el moment virtual unitari que hi hem aplicat ha estat antihorari.

Per calcular θ_2 , prendrem com a conjunt de càrregues virtuals un moment unitari antihorari al punt 2 i les reaccions virtuals corresponents, que calculem aplicant-hi l'estàtica. El tenim representat a la figura 13.30

Fig. 13.30



Per a la regió entre 1 i 2, tenim (fig. 13.31) $M_z = x/l$ i per a la regió entre 2 i 3 (fig. 13.32), $M_z = -x/l$

Fig. 13.31

Fig. 13.32



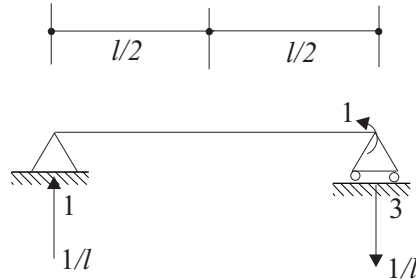
Substituint els moments reals i virtuals calculats i separant en dues integrals, una per a cada regió,

$$\theta_2 = \int_0^{l/2} \frac{(x/l)(M_0 x/l)}{EI} + \int_0^{l/2} \frac{(-x/l)(-M_0 x/l)}{EI} = \frac{M_0 l}{12EI}$$

El signe positiu indica que és un gir antihorari ja que el moment virtual unitari que hi hem aplicat ha estat antihorari.

Per calcular θ_3 , prendrem com a conjunt de càrregues virtuals un moment unitari antihorari al punt 3, i les reaccions virtuals corresponents, que calculem aplicant-hi l'estàtica. El tenim representat a la figura 13.33.

Fig. 13.33



Per a la regió entre 1 i 2 tenim (fig. 13.34) $M_z = x/l$ i per a la regió entre 2 i 3 (fig. 13.35), $M_z = 1 - x/l$

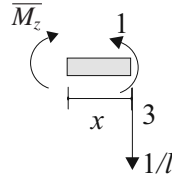
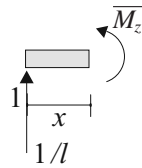


Fig. 13.34

Fig. 13.35

Substituint els moments reals i virtuals calculats, i separant en dues integrals, una per a cada regió,

$$\theta_3 = \int_0^{l/2} \frac{(x/l)(M_0 x/l)}{EI} + \int_0^{l/2} \frac{(1-x/l)(-M_0 x/l)}{EI} = -\frac{M_0 l}{24EI}$$

el signe negatiu indica que és un gir horari ja que el moment virtual unitari que hi hem aplicat ha estat antihorari.

Per calcular v_2 , prendrem com a conjunt de càrregues virtuals una força unitària cap avall al punt 2, i les reaccions virtuals corresponents, que calculem aplicant-hi l'estàtica. El tenim representat a la figura 13.36

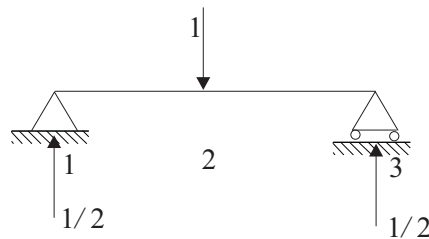


Fig. 13.36

Per a la regió entre 1 i 2 tenim (fig. 13.37) $M_z = x/2$ i per a la regió entre 2 i 3 (fig. 13.38), $M_z = x/2$

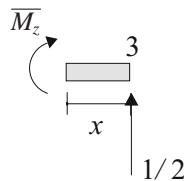
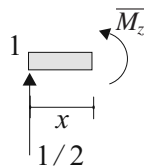


Fig. 13.37

Fig. 13.38

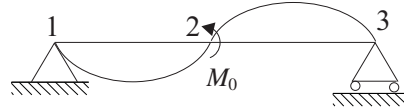
Substituint els moments reals i virtuals calculats, i separant en dues integrals, una per a cada regió,

$$v_2 = \int_0^{l/2} \frac{(x/2)(M_0 x/l)}{EI} + \int_0^{l/2} \frac{(x/2)(-M_0 x/l)}{EI} = 0$$

A la vista dels resultats, la deformada de l'estructura serà la que s'indica a la figura 13.39



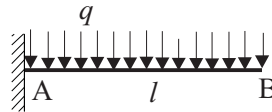
Fig. 13.39



Problema 13.5

Calculeu el desplaçament vertical i el gir de la secció B de la barra de la figura 13.40. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

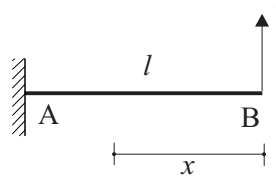
Fig. 13.40



Solució:

Aplicarem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Per calcular el desplaçament vertical v_B del punt B, prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap amunt, aplicada al punt B i les reaccions corresponents al punt A (fig. 13.41).

Fig. 13.41



Tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, escriurem

$$v_B = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual.

El moment flector virtual és (fig. 13.42)

$$\overline{M}_z = x$$

i el moment flector real (fig. 13.43),

$$M_z = -\frac{qx^2}{2}$$

i, substituint,

$$v_B = \int_0^l -\frac{qx^3}{2EI} dx = \frac{-ql^4}{8EI}$$

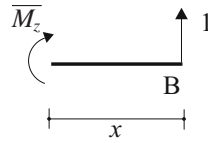


Fig. 13.42

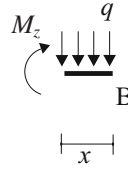


Fig. 13.43

És a dir, un desplaçament cap avall ja que la càrrega virtual l'hem aplicada cap amunt.

Per calcular el gir θ_B del punt B, prenem com a conjunt de càrregues virtuals un moment flector virtual unitari antihorari, aplicat al punt B, i les reaccions corresponents al punt A (fig. 13.44).

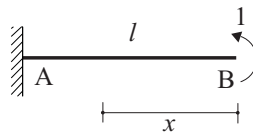


Fig. 13.44

El moment flector virtual és

$$\overline{M}_z = 1$$

i el moment flector real és el mateix d'abans

$$M_z = -\frac{qx^2}{2}$$

i, substituint,

$$\theta_B = -\frac{1}{EI} \int_0^l \frac{qx^2}{2} dx = -\frac{ql^3}{6EI}$$

És a dir, un gir horari ja que el moment virtual l'hem pres antihorari.

Problema 13.6

Calculeu el desplaçament de l'extrem dret de la barra de la figura 13.45, que té un mòdul de Young E , secció transversal A i longitud l .



Fig. 13.45

Solució:

Procediment: teorema de l'energia. Aplicant el teorema de l'energia durant el procés de deformació,

$$W_E = U$$



on W_E és el treball de les forces externes i U l'increment d'energia potencial elàstica de la barra. L'única força que fa treball durant la deformació és P

$$W_E = \frac{1}{2} P u_B$$

D'altra banda, tenint en compte que u_A és zero,

$$U = \frac{1}{2} k u_B^2 \quad (13.48)$$

on $k = EA/l$ és el coeficient de rigidesa de la barra. Igualant,

$$u_B = \frac{P}{k} = \frac{Pl}{EA}$$

Procediment: principi del treball virtual. Aplicant el principi del treball virtual,

$$\delta W_E = \delta U \quad (13.49)$$

Permetem un desplaçament virtual al punt B , δu_B . El treball de les forces externes δW_E és

$$\delta W_E = P \delta u_B$$

Per calcular la variació d'energia interna, tenint en compte 13.48 i derivant respecte de u_B ,

$$\delta U = k u_B \delta u_B$$

i, aplicant 13.49,

$$P \delta u_B = k u_B \delta u_B$$

d'on

$$P = k u_B \quad (13.50)$$

i, finalment,

$$u_B = \frac{P}{k} = \frac{Pl}{EA}$$

Procediment: mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38) Prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap a la dreta, aplicada al punt B , i la reacció corresponent al punt A (fig. 13.46).

El desplaçament real del punt B serà, doncs, tenint en compte que la reacció virtual no fa treball,

$$u_B = \int \frac{\bar{N} N}{AE} dx$$



Fig. 13.46

on N és l'esforç real i \bar{N} és l'esforç virtual que apareixerà en aplicar la càrrega virtual.

En aquest cas,

$$N = P$$

$$\bar{N} = 1$$

Així, doncs,

$$u_B = \int_0^l \frac{P}{AE} dx = \frac{Pl}{EA}$$

Problema 13.7

Calculeu el desplaçament vertical del punt C de la figura 13.47. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

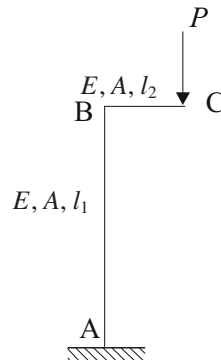


Fig. 13.47

Solució:

Aplicarem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Per calcular el desplaçament vertical v_C del punt C, prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap amunt, aplicada en el punt C, i les reaccions corresponents al punt A (fig. 13.48).

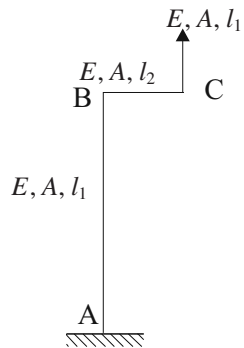
Tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, escriurem

$$v_C = \int_0^{l_1} \frac{\bar{N}N}{AE} dx + \int_0^{l_1} \frac{\bar{M}_z M_z}{EI} dx + \int_0^{l_2} \frac{\bar{M}_z M_z}{EI} dx$$

on N, M_z són l'esforç normal i el moment flector reals, i \bar{N}, \bar{M}_z , l'esforç normal i el moment flector que apareixen en aplicar la càrrega virtual.



Fig. 13.48



Per a la barra 1, tenim (fig. 13.49)

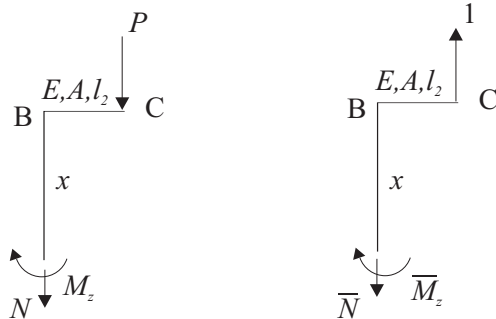
$$\bar{N} = 1$$

$$N = -P$$

$$\bar{M}_z = l_2$$

$$M_z = -Pl_2$$

Fig. 13.49



Per a la barra 2 (fig. 13.50)

$$\bar{N} = 0$$

$$N = 0$$

$$\bar{M}_z = x$$

$$M_z = -Px$$

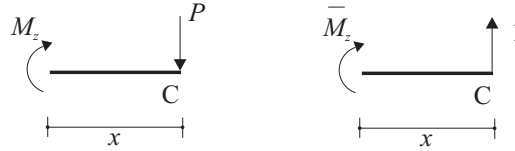


Fig. 13.50

i, substituint,

$$v_C = \int_0^{l_1} \frac{-P}{AE} dx + \int_0^{l_1} \frac{-Pl_2^2}{EI} dx + \int_0^{l_2} \frac{-Px^2}{EI} dx = -\frac{Pl_1}{AE} - \frac{Pl_2^2 l_1}{EI} - \frac{Pl_2^3}{3EI}$$

que és un desplaçament cap avall ja que la càrrega virtual l'hem pres cap amunt.

Problema 13.8

Calculeu les reaccions en A i C, i el desplaçament del punt B de la figura 13.51.

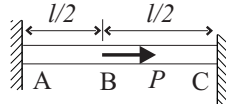


Fig. 13.51

Solució:

Procediment: teorema de l'energia. Aplicant el teorema de l'energia durant el procés de deformació,

$$W_E = U$$

El treball de les forces exteriors és el que fa P , i val

$$W_E = \frac{1}{2} P u_B$$

Per calcular l'energia interna acumulada durant el procés de deformació, podem considerar la barra formada per dos trams: AB i BC, de manera que

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \frac{1}{2} k_{AB} u_B^2 + \frac{1}{2} k_{BC} u_B^2 = \frac{1}{2} (k_{AB} + k_{BC}) u_B^2$$

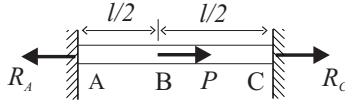
i, igualant i tenint en compte que $k_{AB} = k_{BC} = \frac{EA}{l/2}$,

$$\frac{1}{2} P u_B = \frac{1}{2} (k_{AB} + k_{BC}) u_B^2$$

$$u_B = \frac{P}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{Pl}{4EA}$$

Suposem que les reaccions a A i C tenen els sentits representats a la figura 13.52

Fig. 13.52



La reacció al punt A la calcularem tornant a aplicar el teorema de l'energia al tros AB. Tenint en compte que als seus extrems actua una força R_A , tindrem

$$W_E = U_{AB}$$

$$\frac{1}{2}R_A u_B = \frac{1}{2}k_{AB}u_B^2$$

$$R_A = k_{AB}u_B$$

$$R_A = \frac{P}{2}$$

Aplicant l'estàtica a la barra, es dedueix que $R_C = P/2$.

Procediment: principi del treball virtual. Permetem un únic desplaçament virtual cap a la dreta δu_B al punt B. El principi del treball virtual s'enuncia com

$$\delta W_E = \delta U$$

on δW_E és el treball de les forces externes i δU , la variació d'energia interna. En aquest desplaçament virtual, R_A i R_C no fan treball; l'única força que fa treball és P , i val

$$\delta W_E = P\delta u_B$$

L'energia interna es pot expressar com

$$U = \frac{1}{2}K_{AB}u_B^2 + \frac{1}{2}K_{BC}u_B^2$$

Per tant,

$$\delta U = (K_{AB} + K_{BC})u_B\delta u_B$$

igualant i substituint el valor de les K ,

$$P\delta u_B = \left(\frac{EA}{l/2} + \frac{EA}{l/2}\right)u_B\delta u_B$$

d'on

$$u_B = \frac{Pl}{4EA}$$

observem que, en sortir u_B positiu, significa que el desplaçament u_B és cap a la dreta, que és el sentit que hem fixat per als desplaçaments. Una vegada tenim el desplaçament u_B , la reacció R_A la podem calcular aplicant l'expressió $\Delta l = \int \frac{N}{AE} dx$ al tros AB. En aquest cas, tindrem



$$u_B = \frac{R_A}{EA} l/2$$

$$\frac{Pl}{4EA} = \frac{R_A}{EA} l/2$$

d'on

$$R_A = P/2$$

Aplicant-hi l'estàtica,

$$R_C = -P/2$$

Procediment: mètode de la càrrega unitat (primera opció). Prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap a l'esquerra, aplicada al punt A, i la reacció corresponent al punt C (fig. 13.53).

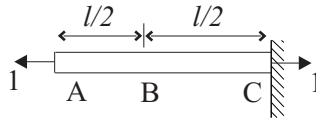


Fig. 13.53

El desplaçament real del punt A serà, doncs, tenint en compte que la reacció virtual no fa treball,

$$u_A = \int_0^l \frac{\bar{N}N}{AE} dx$$

on N és l'esforç real i \bar{N} és l'esforç virtual que apareixerà en aplicar la càrrega virtual.

En aquest cas (fig. 13.54),

$$\bar{N} = 1$$

a tot el tram ABC i

$$N = \begin{cases} P + R_C & \text{al tram AB} \\ R_C & \text{al tram BC} \end{cases}$$

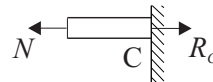
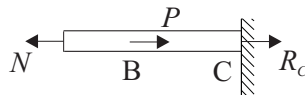


Fig. 13.54

Tenint en compte que $u_A = 0$,

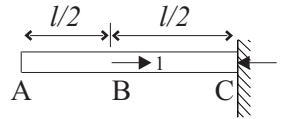
$$u_A = 0 = \int_0^{l/2} \frac{P + R_C}{EA} dx + \int_0^{l/2} \frac{R_C}{EA} dx$$

d'on $R_C = -P/2$. Aplicant-hi l'estàtica, $R_A = P/2$. Una vegada tenim R_A i R_C , podem calcular el desplaçament del punt B, u_B , prenent com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap a la dreta, aplicada al punt B, i la reacció corresponent al punt C (fig. 13.55). Tindrem, per a u_B

$$u_B = \int_0^{l/2} \frac{0P/2}{AE} + \int_0^{l/2} \frac{-1(-P/2)}{AE} = \frac{Pl}{4AE}$$

Procediment: mètode de la càrrega unitat (segona opció). Podríem haver pres de bon començament com a conjunt de càrregues virtuals una unitària cap a la dreta, al punt B, i la corresponent reacció a C (fig. 13.55)

Fig. 13.55



El desplaçament real del punt B serà, doncs, tenint en compte que la reacció virtual no fa treball,

$$u_B = \int_0^l \frac{\bar{N}N}{AE} dx$$

on N és l'esforç real i \bar{N} és l'esforç virtual que apareixerà en aplicar la càrrega virtual. Així,

$$\bar{N} = -1$$

al tram BC i zero a la resta, i l'esforç normal real és el mateix que hem deduït a l'opció anterior (fig. 13.54)

$$N = \begin{cases} P + R_C & \text{al tram AB} \\ R_C & \text{al tram BC} \end{cases}$$

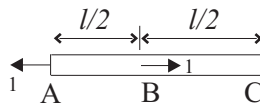
per tant,

$$u_B = \int_0^{l/2} -\frac{R_C}{EA} dx = \frac{-R_C l}{2EA}$$

Observem que tenim dues incògnites; així doncs, necessitem una altra equació.

Prenent ara com a conjunt de càrregues virtuals una unitària cap a la dreta, al punt B, i la corresponent reacció a A (fig. 13.56),

Fig. 13.56





El desplaçament real del punt B serà, doncs, tenint en compte que la reacció virtual no fa treball,

$$u_B = \int \frac{\bar{N}N}{AE} dx$$

on N és l'esforç real i \bar{N} és l'esforç virtual que apareixerà en aplicar la càrrega virtual. Així,

$$\bar{N} = 1$$

al tram AB i zero a la resta,

$$N = \begin{cases} P + R_C & \text{al tram AB} \\ R_C & \text{al tram BC} \end{cases}$$

Per tant,

$$u_B = \int_0^{l/2} \frac{P + R_C}{EA} dx = \frac{(P + R_C)l}{2EA}$$

i, igualant

$$\frac{-R_C l}{2EA} = \frac{(P + R_C)l}{2EA}$$

$$R_C = -P/2$$

Per l'estàtica, $R_A = P/2$. Una vegada tenim R_C , podem calcular el desplaçament del punt B u_B

$$u_B = \frac{PL}{4AE}$$

Problema 13.9

Calculeu les reaccions als extrems de la barra de la figura 13.57, considerant negligibles la deformació per esforços normals i per cisallament.

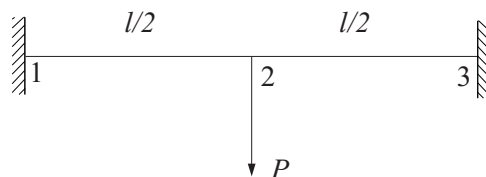
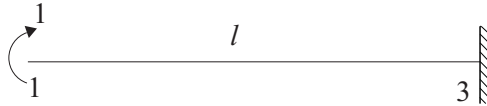


Fig. 13.57

Solució:

Aplicarem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Prenem com a conjunt de càrregues virtuals un moment unitari horari, aplicat al punt 1, i les reaccions corresponents al punt 3 (fig. 13.58).

Fig. 13.58



El gir real del punt 1 el podem expressar, tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, com

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

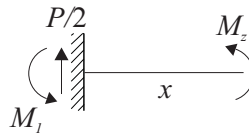
on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual.

El moment flector virtual és

$$\overline{M}_z = 1$$

al llarg de tota la barra. Per al càlcul del moment flector real, hem de considerar les dues regions de l'estructura. Per a la regió entre 1 i 2 fem un tall i n'aïllem la part de l'esquerra (fig. 13.59). Per simetria, les forces de reacció als encastaments seran $P/2$; així el moment flector M_z serà

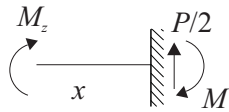
Fig. 13.59



$$M_z = Px/2 - M_1$$

A la regió entre 2 i 3, fem un tall i n'aïllem la part de la dreta (fig. 13.60), el moment flector serà

Fig. 13.60



$$M_z = Px/2 - M_1$$

Així tindrem

$$\theta_1 = \int_0^{l/2} \frac{Px/2 - M_1}{EI} dx + \int_0^{l/2} \frac{Px/2 - M_1}{EI} dx$$



Tenint en compte que $\theta_1 = 0$, obtenim

$$M_1 = \frac{Pl}{8}$$

Per calcular v_2 , apliquem un altre conjunt de càrregues virtuals: una càrrega virtual unitària cap amunt al punt 2 i les corresponents reaccions virtuals al punt 3 (fig. 13.61). (Podríem haver pres les reaccions virtuals al punt 1 en comptes de les del punt 3, o bé les reaccions en els dos punts).

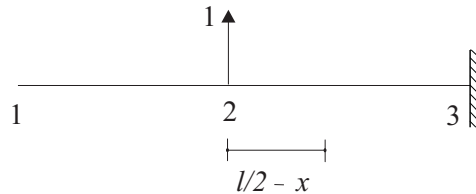


Fig. 13.61

El moment flector virtual és, en aquest cas,

$$\overline{M}_z = 0 \quad \text{al tram 1 2}$$

$$\overline{M}_z = l/2 - x \quad \text{al tram 2 3}$$

M_z és el mateix que en el cas anterior, però ja podem substituir el valor del moment a l'encastament pel valor trobat. Així,

$$v_2 = \int_0^{l/2} \frac{(l/2 - x)(Px/2 - Pl/8)}{EI} dx = -\frac{Pl^3}{192EI}$$

que és un desplaçament cap avall ja que la càrrega virtual l'hem pres cap amunt.

Per calcular el gir real del punt 2, tot i que per simetria podríem assegurar que és zero, ho farem aplicant un altre conjunt de càrregues virtuals (fig. 13.62): un moment virtual unitari horari al punt 2 i les corresponents reaccions virtuals al punt 3.

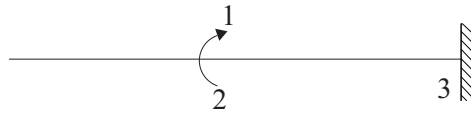


Fig. 13.62

El moment flector virtual serà, en aquest cas,

$$\overline{M}_z = 1 \quad \text{tan sols al tram 2 3}$$

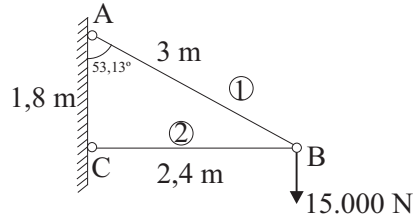
M_z és el mateix que en el cas anterior. Així,

$$\theta_2 = \int_0^{l/2} \frac{Px/2 - Pl/8}{EI} dx = 0$$

Problema 13.10

Les dues barres AB i CD de la figura 13.63 estan connectades mitjançant un passador i lligades a l'exterior també amb passadors. Sabent que les seccions transversals són $A_{AB} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{BC} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ i que els mòduls de Young respectius són $E_{AB} = 200 \text{ GPa}$ i $E_{BC} = 12 \text{ GPa}$, trobeu el desplaçament del punt B.

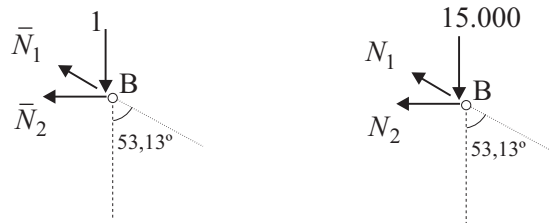
Fig. 13.63



Solució:

Aplicarem el mètode de la càrrega unitat (13.38). Per calcular el desplaçament vertical del punt B, prendrem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega virtual unitària cap a baix al punt B, i les reaccions corresponents en A i C (fig. 13.64),

Fig. 13.64



Tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, escriurem

$$v_B = \int_0^{l_1} \frac{\bar{N}_1 N_1}{E_1 A_1} dx + \int_0^{l_2} \frac{\bar{N}_2 N_2}{E_2 A_2} dx$$

on x és l'eix local longitudinal per a cada una de les barres, N_i és l'esforç normal real a la barra i i \bar{N}_i és l'esforç normal a la barra i en aplicar la càrrega unitat.

De la figura 13.64, s'obté

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{\cos 53,13^\circ}$$

$$\bar{N}_2 = -\tan 53,13^\circ$$

$$N_1 = \frac{15.000}{\cos 53,13^\circ}$$

$$N_2 = -15.000 \tan 53,13^\circ$$



i, substituint,

$$v_B = \frac{1}{\cos 53,13^\circ} \frac{15.000}{3,125 \cdot 10^{-4} 200 \cdot 10^9} 3 + \frac{(-\tan 53,13^\circ)(-15.000 \tan 53,13^\circ)}{2 \cdot 10^{-2} 12 \cdot 10^9} 2,4 =$$

$$= 0,00227 \text{ m} = 2,27 \text{ mm}$$

Per tant, és un desplaçament cap a baix, ja que la càrrega unitat l'hem aplicada en aquest sentit.

Aplicant ara una càrrega virtual unitat horitzontal cap a la dreta al punt B (fig. 13.65), obtindrem el desplaçament horitzontal del punt B. Els esforços normals reals són els mateixos que abans i els virtuals, $\bar{N}_1 = 0$ i $\bar{N}_2 = 1$; per tant,

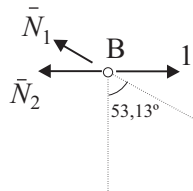


Fig. 13.65

$$u_B = \frac{-15.000 \tan 53,13^\circ}{2 \cdot 10^{-2} 12 \cdot 10^9} 2,4 = -0,26 \text{ mm}$$

que és un desplaçament cap a l'esquerra ja que la càrrega unitària l'hem aplicada cap a la dreta.

Problema 13.11

Calculeu les reaccions als extrems de la barra de la figura 13.66.

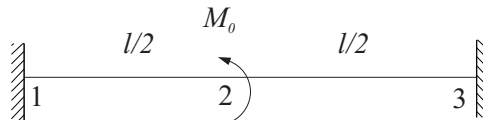


Fig. 13.66

Solució:

Aplicarem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap amunt, aplicada al punt 1, i les reaccions corresponents en el punt 3 (fig. 13.67).

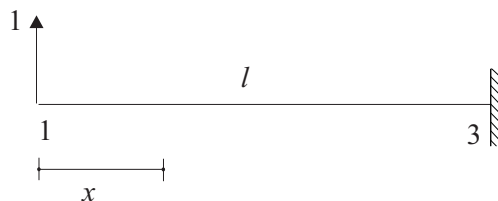


Fig. 13.67

El desplaçament real del punt 1, que val zero en aquest cas, el podem expressar, tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, com

$$v_1 = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

on M_z és el moment flector real i \overline{M}_z és el moment flector que apareixerà en aplicar la càrrega virtual. En aquest cas,

$$\overline{M}_z = x$$

per a tota la barra. Per al càlcul del moment flector real, primerament dibuixem les reaccions (fig. 13.68). Per a la regió entre 1 i 2, fem un tall i n'aïllem la part de l'esquerra (fig. 13.69); el moment flector serà

Fig. 13.68

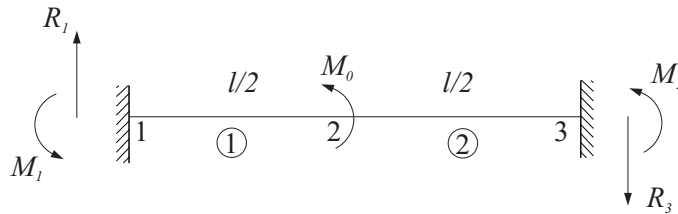
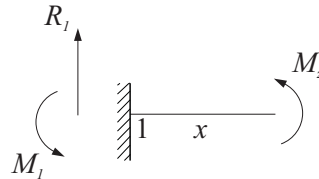


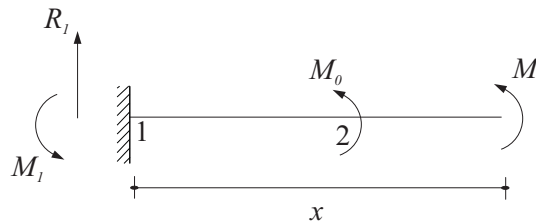
Fig. 13.69



$$M_z = R_1 x - M_1$$

Per a la regió entre 2 i 3 (fig. 13.70), el moment flector serà

Fig. 13.70



$$M_z = R_1 x - M_0 - M_1$$

Així,

$$0 = \int_0^{l/2} \frac{x(-M_1 + R_1 x)}{EI_z} dx + \int_{l/2}^l \frac{x(-M_0 - M_1 + R_1 x)}{EI_z} dx = 12M_1 + 9M_0 - 8R_1 l$$



i, com que tenim dues incògnites, R_1 i M_1 , necessitem una altra equació per resoldre. Suposem un altre conjunt de càrregues virtuals (fig. 13.71),

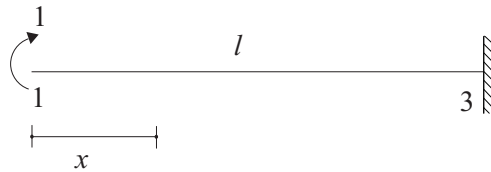


Fig. 13.71

El gir real del punt 1, que val zero en aquest cas, el podem expressar, tenint en compte que les reaccions virtuals no fan treball, com

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

En aquest cas,

$$\overline{M}_z = 1$$

per a tota la barra. Els moments flectors reals són el mateixos que en el cas anterior. Així,

$$0 = \int_0^{l/2} \frac{-M_1 + R_1 x}{EI_z} dx + \int_{l/2}^l \frac{-M_0 - M_1 + R_1 x}{EI_z} dx = 8M_1 - 4R_1 l + 4M_0$$

Resolent el sistema,

$$M_1 = M_0/4, R_1 = \frac{3M_0}{2l}$$

i, per l'estàtica aplicada al conjunt, $R_3 = \frac{3M_0}{2l}$ i $M_3 = M_0/4$

Problema 13.12

Calculeu la fletxa del punt C de la figura 13.72. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

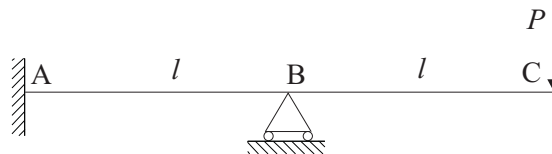


Fig. 13.72

Solució:

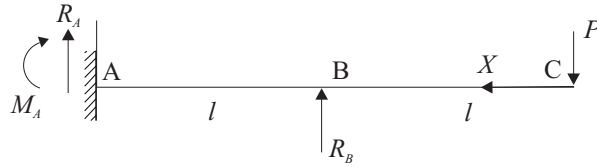
Primerament, apliquem les equacions de l'estàtica a l'estructura (fig. 13.73). Observem que és un problema hiperestàtic, ja que tenim dues equacions de l'estàtica i tres reaccions.

$$R_A + R_B = P$$

$$M_A + P2l = R_B l$$



Fig. 13.73

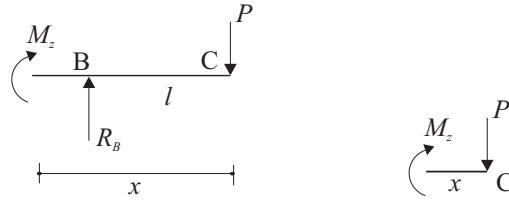


Per a la regió entre A i B, el moment flector real serà (fig. 13.74)

$$M_z = R_B(x - l) - Px$$

Fig. 13.74

Fig. 13.75

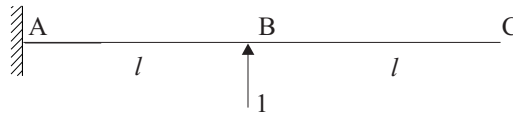


Per a la regió entre B i C, el moment flector real serà (fig. 13.75)

$$M_z = -Px$$

Ara apliquem el mètode de la càrrega unitat (eq. 13.38). Comencem calculant R_B ja que el seu desplaçament és conegut, $v_B = 0$ i, per tant, no hi introduïm cap incògnita addicional. Prenem com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària cap amunt, aplicada al punt B, i les reaccions corresponents al punt A (fig. 13.76).

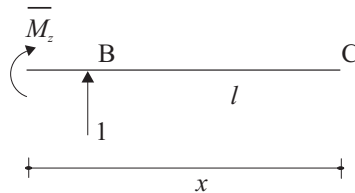
Fig. 13.76



Solament hi haurà moment virtual a la regió AB, i valdrà (fig. 13.77),

$$\overline{M}_z = x - l$$

Fig. 13.77



Per tant, integrant solament a la regió BA,

$$v_B = \int_l^{2l} \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx = \int_l^{2l} \frac{(x - l)(R_B(x - l) - Px)}{EI} dx$$



d'on s'obté, tenint en compte que $v_B = 0$,

$$R_B = 5P/2$$

i, tenint en compte les equacions de l'estàtica,

$$R_A = -3P/2, \quad M_A = Pl/2$$

El càlcul del desplaçament del punt C, amb l'objectiu d'il·lustrar el procediment, el farem de dues maneres, prenent un conjunt de càrregues virtuals diferent en cada una de elles.

Opció A: Prenem com a sistema de càrregues virtuals una càrrega unitat cap avall aplicada a C, zero al punt B, i les reaccions que corresponguin al punt A per mantenir l'equilibri (fig. 13.78).

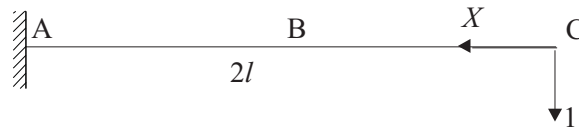


Fig. 13.78

Així, doncs, el desplaçament real del punt C el podem expressar com

$$v_C = \int_0^{2l} \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

El moment virtual és (fig. 13.79)

$$\overline{M}_z = -x; \quad 0 < x < 2l$$

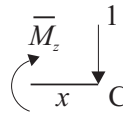


Fig. 13.79

Així,

$$v_C = \int_0^l \frac{(-x)(-Px)}{EI} dx + \int_l^{2l} \frac{-x(R_B(x-l) - Px)}{EI} dx = \frac{8Pl^3}{3EI} - \frac{5R_B l^3}{6EI}$$

i, substituint R_B ,

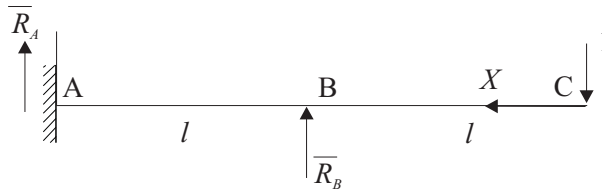
$$v_C = \frac{7}{12} \frac{Pl^3}{EI}$$

que és un desplaçament cap avall, atès que és un valor positiu i la càrrega unitària a C l'hem aplicada cap avall.

Opció B: Prenem com a sistema de càrregues virtuals una càrrega unitat cap avall, aplicada a C, i dues forces de reacció a B i A, sense moment de reacció al punt A (fig. 13.80). Aquest conjunt de càrregues virtuals és correcte ja que manté l'equilibri; simplement

hem fet zero el moment de reacció en A. El que no podríem fer, és afegir un moment de reacció a B ja que és una articulació i no hi pot aparèixer.

Fig. 13.80



El desplaçament real del punt C el podem expressar com

$$v_C = \int_0^{2l} \frac{\overline{M}_z M_z}{EI} dx$$

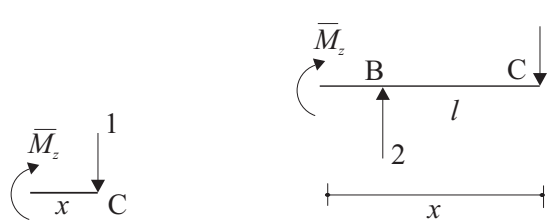
Aplicant l'estàtica, calculem les dues reaccions virtuals i n'obtenim $\overline{R}_A = -1$ i $\overline{R}_B = 2$. Així, els moments virtuals són

$$\overline{M}_z = -x$$

per a la regió CB (fig. 13.81) i

Fig. 13.81

Fig. 13.82



$$\overline{M}_z = x - 2l$$

per a la regió BA (fig. 13.82). Substituint,

$$v_C = \int_0^l \frac{(-x)(-Px)}{EI} + \int_l^{2l} \frac{(x-2l)(5P/2(x-l) - Px)}{EI} = \frac{7}{12} \frac{Pl^3}{EI}$$

que coincideix, naturalment, amb el que havia sortit a la opció A. D'altra, observem que també podríem prendre com a conjunt de càrregues virtuals una càrrega unitària al punt C i totes les reaccions corresponents a B i A; seria un bon conjunt de càrregues virtuals, però amb l'inconvenient que tindríem un conjunt de reaccions hiperestàtiques i no les podríem calcular de manera immediata.



Mètode matricial

14.1. Introducció

Aquest procediment de càlcul estructural consisteix fonamentalment a resoldre l'equació 13.11:

$$Q_i = k_{ij}q_j$$

que és un sistema d'equacions on les variables són les forces generalitzades Q_i aplicades als nusos de l'estructura i els desplaçaments generalitzats q_j dels nusos, anomenats també *graus de llibertat de l'estructura*. Assenyalem que, un cop trobats els coeficients de rigidesa k_{ij} , el sistema sempre es pot resoldre, si està en equilibri, ja que serà compatible i determinat, amb el mateix nombre d'equacions que d'incògnites. Vegem-ho amb un exemple. Si ens fixem en l'estructura de la figura 14.1, hi ha vuit càrregues generalitzades (són les vuit components de les forces en els quatre nusos) i vuit desplaçaments generalitzats (són les components dels desplaçaments dels quatre nusos; no considerem els girs); per tant, tenim un sistema de vuit equacions. En el cas de la figura, tenim vuit incògnites (forces: dues al nus 1, una al nus 4; desplaçaments: dos al nus 2, dos al nus 3 i un al nus 4). Si eliminem la barra 5 o la 6, l'equilibri es manté igualment; els coeficients de la matriu de rigidesa canviaran, però continuarem tenint un sistema de vuit equacions amb vuit incògnites. Si substituïm el suport 4 per una articulació en comptes d'un rodet, afegim una reacció en forma de força a les incògnites però en disminuïm un desplaçament, amb la qual cosa continuem tenint vuit incògnites.

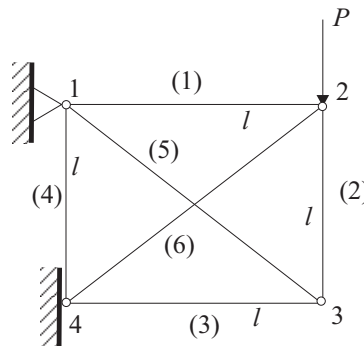


Fig. 14.1
Exemple d'estructura articulada.

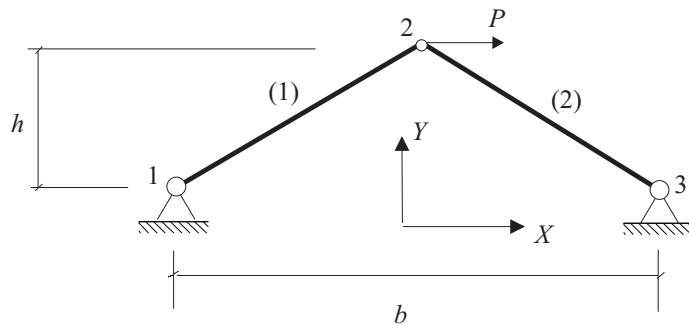
El mètode matricial que seguirem és l'anomenat *mètode directe de rigidesa* i és aplicable a qualsevol estructura formada per barres. Així mateix, constitueix la base per resoldre estructures amb elements de forma geomètrica arbitrària mitjançant el que s'anomena el *mètode dels elements finits*. Per descriure el mètode, ho farem analitzant primerament el tipus més senzill d'estructura: la formada per barres unides entre si mitjançant articulacions i amb forces aplicades únicament als nusos. Una estructura d'aquest tipus, s'anomena *estructura articulada*. Fer l'anàlisi amb aquest tipus d'estructura té l'avantatge que la quantitat de graus de llibertat i, per tant, la dimensió de les matrius és petita, tot i que el procediment és el mateix que per a estructures més complexes.

Després analitzarem l'aplicació a estructures formades per barres unides per nusos rígids amb càrregues concentrades als nusos o repartides al llarg de l'element, les anomenades *estructures reticulades*.

14.2. Estructures articulades

Prenem l'exemple de la figura 14.2 per desenvolupar-ne els passos.

Fig. 14.2
Exemple per a l'anàlisi
del mètode matricial.



El primer que fem és numerar les barres i els nusos. Cada un dels membres, en aquest cas les barres, l'identifiquem amb el superíndex (e) ; així escriurem $l^{(e)}$, $A^{(e)}$ i $E^{(e)}$, en el nostre cas $e = 1, 2$. Els valors que prendrem en aquest exemple són $h = 3 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $P = 12 \text{ N}$, $E = 1.000 \text{ N/cm}^2$ (igual per a les dues barres), $A^{(1)} = 2 \text{ cm}^2$, $A^{(2)} = 4 \text{ cm}^2$. L'equació matricial 13.11 que s'ha de resoldre la referirem a uns eixos de coordenades x, y , que anomenarem *sistema de coordenades global*; així, cada una de les forces generalitzades Q_i (en aquest cas, simplement forces) tindrà dues components, i el conjunt Q_i el podrem escriure com

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix}$$

i l'anomenarem *vector de càrregues generalitzades*. El desplaçament q_i de cada nus tindrà, en el nostre cas, dues components, que designarem per u_{xi} i u_{yi} ; així escriurem el conjunt de desplaçaments en forma de vector \mathbf{u} ; en el nostre cas,



$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix}$$

i l'anomenarem *vector de desplaçaments generalitzats*. L'equació matricial 13.11 l'escriurem, doncs,

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (14.1)$$

on la matriu de rigidesa \mathbf{K} és una matriu de dimensió 6×6 , que hem de determinar.

El pas següent és desconnectar l'estructura i assignar un sistema de coordenades $\bar{x}^{(e)}, \bar{y}^{(e)}$ per a cada un dels membres, que anomenarem *sistema de coordenades local*. Aquest sistema el prendrem de manera que l'eix segueixi l'eix de la barra del nus i al j , on $i < j$ (fig. 14.3).

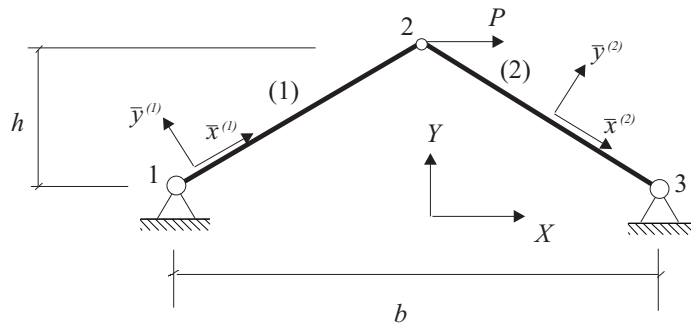


Fig. 14.3
Eixos locals i globals.

A continuació, calculem l'equació de rigidesa per a cada una de les barres, referida als eixos locals. Serà del tipus

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{u}} \quad (14.2)$$

Les components del vector força i del vector desplaçament seran (fig. 14.4)

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{pmatrix}$$

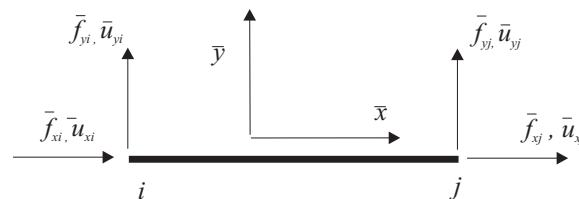


Fig. 14.4
Càrregues i desplaçaments respecte dels eixos locals en una barra sotmesa a forces als extrems.



Per calcular la matriu de rigidesa local $\bar{\mathbf{K}}$, una manera és partir de l'equació de la tracció o compressió pura

$$d = \frac{N}{EA} l$$

on d és el desplaçament relatiu dels nusos de la barra, N l'esforç intern normal, A l'àrea de la secció transversal, E el mòdul de Young i l la longitud de la barra. Tenint en compte que

$$d = \bar{u}_{xj} - \bar{u}_{xi}$$

i que

$$N = \bar{f}_{xj} = -\bar{f}_{xi}$$

podem escriure la relació següent:

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}} \quad (14.3)$$

que és l'equació de rigidesa de la barra en coordenades locals. És a dir,

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.4)$$

és la matriu de rigidesa d'una barra en coordenades locals.

Un cop tenim escrita l'equació de rigidesa en coordenades locals, hem de transportar-la a l'equació 14.1. Per a això, primer hem de fer un canvi de coordenades, de locals a globals, tant en les forces com en els desplaçaments. La relació per als desplaçaments és (fig. 14.5)

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & 0 & 0 \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) \\ 0 & 0 & \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

on el bloc superior esquerre és la matriu de rotació \mathbf{R} , formada pels cosinus directors, i afecta les components del vector de desplaçaments del punt i ; el bloc inferior dret és la mateixa matriu i afecta el punt j . Podem simplificar la notació de l'equació anterior posant $c = \cos(\bar{x}, x)$ i $s = \sin(\bar{x}, x)$. Escriurem, doncs,

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{pmatrix} \quad (14.6)$$



La matriu 4×4 del membre de la dreta s'anomena *matriu de transformació dels desplaçaments* i la designarem per **T**. Així, 14.6 l'escriurem com

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (14.7)$$

Per a les forces, tindrem

$$\begin{pmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{xj} \\ f_{yj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \end{pmatrix} \quad (14.8)$$

La matriu 4×4 del membre de la dreta s'anomena *matriu de transformació de les forces* i s'observa que és la transposada de **T**. Així, 14.8 l'escriurem com

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^t \bar{\mathbf{f}} \quad (14.9)$$

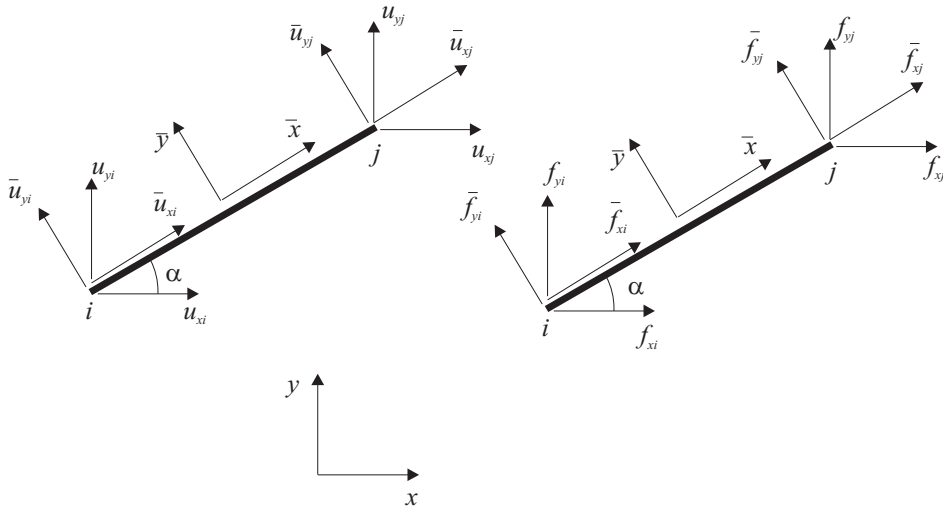


Fig. 14.5
Pas de coordenades
locals a globals.

No sempre la matriu **T** és quadrada; per tant, no sempre serà invertible. En trobarem un exemple al final del capítol (equació 14.37).

Per a cada barra e , l'equació de rigidesa en coordenades globals és

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (14.10)$$

i 14.1, 14.7 i 14.9 les escriurem com

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)} = \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \bar{\mathbf{u}}^{(e)} \quad (14.11)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (14.12)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{T}^{t(e)} \bar{\mathbf{f}}^{(e)} \quad (14.13)$$



substituint 14.12 i 14.13 a 14.11, i comparant amb 14.10, arribem a la relació

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^t \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}$$

i, substituint les components de \mathbf{T} ,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{pmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{pmatrix}$$

Per al nostre exemple, les equacions de rigidesa en coordenades globals seran, per a la barra 1,

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 \\ 12 & 9 & -12 & -9 \\ -16 & -12 & 16 & 12 \\ -12 & -9 & 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \end{pmatrix}$$

i, per a la barra 2,

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = 32 \begin{pmatrix} 16 & -12 & -16 & 12 \\ -12 & 9 & 12 & -9 \\ -16 & 12 & 16 & -12 \\ 12 & -9 & -12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Un cop trobada l'equació de rigidesa en coordenades globals de cada element, el pas següent és construir la matriu \mathbf{K} de l'estructura. Aquest procés s'anomena *acoblament* i consisteix a col·locar la matriu de rigidesa de cada element en el lloc que li correspon dins la matriu global de l'estructura. El procés d'acoblament l'aconseguim primer augmentant l'equació de rigidesa de cada barra amb els graus de llibertat que hi falten per completar el vector de desplaçaments generalitzats de l'estructura, simplement afegint files i columnes de zeros en els llocs corresponents de la matriu i col·locant zeros a les forces generalitzades afegides. Per al nostre cas, atès que el vector de desplaçaments generalitzats té sis components, cada equació de rigidesa l'hem d'augmentar amb quatre components. Tindrem, per a la barra 1,

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & -12 & -9 & 0 & 0 \\ -16 & -12 & 16 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 12 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix}$$



i, per a la barra 2,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = 32 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & -16 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 9 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & -16 & 12 & 16 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & -9 & -12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix}$$

on l'equació de la barra 1 l'hem augmentada amb el nus 3 i la barra 2, amb el nus 1. Observem també que hem eliminat els superíndexs de les u per tenir en compte la compatibilitat en els desplaçaments, i observem que el vector de desplaçaments generalitzats ha de ser el mateix a totes les equacions de rigidesa de les barres, conservant, naturalment, el mateix ordre. Les equacions anteriors es poden escriure com

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)} &= \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{u} \\ \mathbf{f}^{(2)} &= \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{u} \end{aligned}$$

A continuació, imposem la condició d'equilibri a cada un dels nusos, és a dir,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} = (\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}) \mathbf{u}$$

on \mathbf{f} és el vector de càrregues generalitzades que actua sobre l'estructura. Observem que cada nus té tantes components de \mathbf{f} com moviments, prescrits o no, hi hagi al nus. En el nostre exemple, serà

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 256 & 192 & -256 & -192 & 0 & 0 \\ 192 & 144 & -192 & -144 & 0 & 0 \\ -256 & -192 & 768 & -192 & -512 & 384 \\ -192 & -144 & -192 & 432 & 384 & -288 \\ 0 & 0 & -512 & 384 & 512 & -384 \\ 0 & 0 & 384 & -288 & -384 & 288 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} \quad (14.14)$$

Les condicions de lligadura s'expressen, en aquest cas, per les equacions

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{x3} = u_{y3} = 0 \quad (14.15)$$

En cas que els valors prescrits per als desplaçaments siguin diferents de zero o que les equacions de lligadura impliquin una altra relació més general entre els desplaçaments, el procediment de càlcul difereix lleugerament del que es descriu a continuació; ho veurem al final d'aquest apartat.

Continuant amb el procés, les forces externes aplicades són

$$f_{x2} = P = 12 \quad f_{y2} = 0 \quad (14.16)$$

Per aplicar aquestes condicions, eliminem les files i columnes 1, 2, 5 i 6 (les corresponents als desplaçaments prescrits) i n'obtenim



$$\begin{pmatrix} 768 & -192 \\ -192 & 432 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que és l'equació de rigidesa reduïda (la matriu de l'esquerra és la *matriu de rigidesa reduïda*) i correspon als graus de llibertat no prescrits. Substituint 14.16 i resolent, obtenim

$$\begin{aligned} u_{x2} &= 0,0175 \\ u_{y2} &= 0,00781 \end{aligned} \quad (14.17)$$

substituint 14.17 i 14.15 a 14.14, s'obté

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 256 & 192 & -256 & -192 & 0 & 0 \\ 192 & 144 & -192 & -144 & 0 & 0 \\ -256 & -192 & 768 & -192 & -512 & 384 \\ -192 & -144 & -192 & 432 & 384 & -288 \\ 0 & 0 & -512 & 384 & 512 & -384 \\ 0 & 0 & 384 & -288 & -384 & 288 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0175 \\ 0,0078 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -4,5 \\ 12 \\ 0 \\ -6 \\ 4,5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.18)$$

on els resultats per a les forces s'han arrodonit. Es pot observar que el sumatori de forces externes és zero, tant en la direcció x com en la y , com era d'esperar. Un cop tenim les forces externes i els desplaçaments, calculem els esforços interns. Per fer-ho, apliquem la matriu de rigidesa en coordenades locals 14.3 a cada una de les barres.

Per a la barra 1, $c = 4/5$ i $s = 3/5$; per tant,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^{(1)} &= \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0175 \\ 0,0078 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,01868 \\ -0,00426 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x1} \\ \bar{f}_{y1} \\ \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \end{pmatrix} = \frac{10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,01868 \\ -0,00426 \end{pmatrix} \quad (14.19)$$



Per tant,

$$\begin{aligned}\bar{f}_{x1} &= -7,472 \text{ N} \\ \bar{f}_{x2} &= 7,472 \text{ N}\end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 1 actúa una tracció de 7,472 N.

Per a la barra 2, $c = 4/5$ i $s = -3/5$; per tant,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}^{(2)} &= \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0175 \\ 0,0078 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,0093 \\ 0,01674 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \\ \bar{f}_{x3} \\ \bar{f}_{y3} \end{pmatrix} = \frac{10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0093 \\ 0,01674 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.20)$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\bar{f}_{x2} &= 7,44 \text{ N} \\ \bar{f}_{x3} &= -7,44 \text{ N}\end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 1 actua una compressió de 7,44 N.

En el cas tridimensional, el vector de desplaçaments generalitzats i el de forces generalitzades tenen tres components per a cada nus respecte als eixos x, y, z : tres desplaçaments o tres forces segons el cas. La matriu de rigidesa de la barra en coordenades locals serà

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i el pas a coordenades globals vindrà donat per l'equació

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^t \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}$$



on \mathbf{T} és la matriu formada pels blocs de la matriu de rotació \mathbf{R} dels cosinus directors dels eixos respecte de x, y, z , i zeros a la resta. El bloc superior esquerre afecta les components lligades a l'extrem i de la barra i el bloc inferior dret, les lligades a l'extrem j .

$$\begin{pmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{pmatrix}$$

La resta del procés és idèntic al descrit per al cas bidimensional.

En l'exemple que hem analitzat, cada condició de lligadura afecta una sola component del desplaçament i fixa el seu valor a zero. De vegades, però, el valor prescrit és diferent de zero; això passa, per exemple, en un assentament del terra. Aquestes condicions de lligadura, que afecten una sola component del desplaçament, s'anomenen *lligadures simples*. Altres vegades, les components estan relacionades mitjançant una equació, que sol ser lineal (com passa en un recolzament mitjançant un rodet inclinat, on la component del desplaçament en la direcció perpendicular al rodet ha de ser zero); aquestes lligadures, que afecten diverses components, s'anomenen *lligadures múltiples*. En tenim un altre exemple en les estructures en què volem negligir la deformació per esforços normals: haurem d'imposar que les components dels desplaçaments dels extrems en la direcció de la barra són iguals (vegeu els problemes 14.10, 14.11, 14.12, 14.14, 14.18, 14.19, 14.20).

Observem que, si els moviments prescrits no són zero, no podem –com hem fet a l'exemple desenvolupat– eliminar les files i les columnes corresponents; hem de buscar un altre procediment. L'anàlisi dels casos de lligadures simples amb moviments prescrits diferents de zero i la de lligadures múltiples lineals els tractarem de la mateixa manera; mitjançant el procediment dels *multiplicadors de Lagrange* [5]. Aquest procediment es basa en el principi de l'energia potencial total mínima (secció 13.6), expressat per 13.43

$$\delta\Pi = 0 \quad (14.21)$$

amb $\Pi = U + V_E$, on Π és l'energia potencial total, U l'energia interna i V_E l'energia potencial de la qual deriven les forces externes. Si \mathbf{K} és la matriu de rigidesa de l'estructura sense les lligadures (alliberada d'elles), tenint en compte 13.13 i 13.14,

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$$

i, tenint en compte 13.44

$$V_E = -\mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

Essent \mathbf{u} el vector de desplaçaments generalitzats i \mathbf{f} el vector de forces generalitzades, escriurem, doncs,

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

Si hi ha m equacions lineals de lligadura, les escrivim en la forma

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

on \mathbf{A} és una matriu $m \times n$ (n és el nombre de components del vector \mathbf{u}). Així, per imposar les m equacions de lligadura, hem d'adjuntar m multiplicadors de Lagrange agrupats en el vector λ i trobar els extrems de la funció

$$L = \Pi + \lambda^T (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b})$$

igualant a zero les derivades parcials respecte de \mathbf{u} i λ , obtenim

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (14.22)$$

que s'anomena *sistema augmentat per multiplicadors* de l'estructura. Resolent-lo, trobarem les components del vector \mathbf{u} . Observem que la matriu \mathbf{K} es voreja amb \mathbf{A} i \mathbf{A}^T , que al vector \mathbf{u} se li afegeix λ i que a \mathbf{f} se li afegeix \mathbf{b} . Aplicarem aquest procediment als problemes 14.13, 14.14 i 14.19.

14.3. Estructures reticulades

Analitzem ara la situació en el cas d'estructures formades per barres que suporten esforços normals, esforços de cisallament, moments flectors i moments torsors. Si les càrregues externes estan aplicades únicament als extrems, hi pot haver tres forces i tres moments a cada un d'ells. En el cas que la barra tingui càrregues concentrades en algun punt intermedi, podem considerar aquest punt com un nou nus de l'estructura, o bé calcular les càrregues equivalents que crea als extrems i afegir-les a les reals. Si el que hi ha és una càrrega repartida, n'hem de calcular les càrregues equivalents i afegir-les als extrems.

Les càrregues equivalents que s'han d'afegir als nusos en el cas de càrrega repartida s'indiquen a la figura 14.6 i el seu càlcul està desenvolupat al problema 12.5. Hem d'indicar que allà el que es calcula són les reaccions externes aplicades sobre la barra, considerada aquesta amb la càrrega repartida i encastada als dos extrems. Les càrregues equivalents són les que, aplicades als extrems, provocarien les mateixes reaccions. Aquestes càrregues equivalents seran, doncs, les contràries de les reaccions trobades (fig. 14.6).

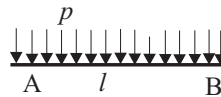
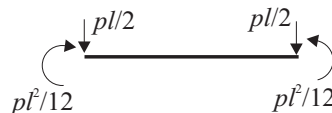


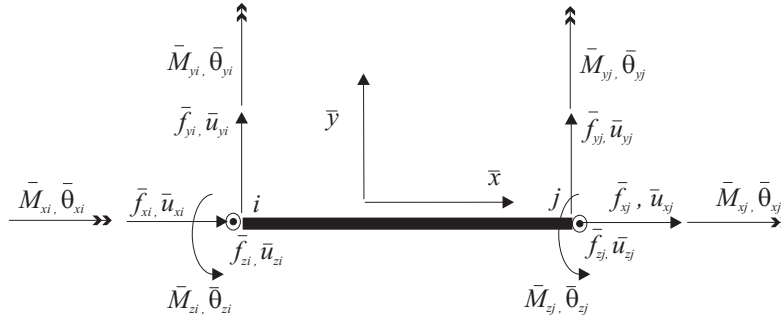
Fig. 14.6
Càrregues equivalents
en els nusos.

equivalent externament a



En el cas general tridimensional, hi ha, doncs, sis càrregues: tres forces i tres moments aplicats a cada extrem, cosa que equival a sis graus de llibertat: tres desplaçaments i tres girs a cada extrem (fig. 14.7). En total, tenim, doncs, dotze graus de llibertat per a cada barra; això vol dir que la matriu de rigidesa tindrà 12×12 components.

Fig. 14.7
Càrregues i desplaçaments en una barra sotmesa a forces i moments als extrems.

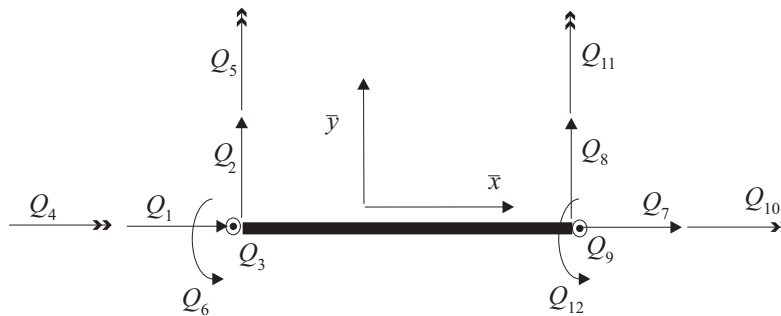


Calculem ara cada un dels coeficients de la matriu de rigidesa $\bar{\mathbf{K}}$. A efectes de claredat, numerem les dotze càrregues generalitzades i els seus dotze graus de llibertat associats (fig. 14.8) i eliminem les etiquetes i i j dels extrems [10]. Així, les components de la matriu de rigidesa les escriurem com

$$\bar{k}_{ij} \quad i, j = 1, \dots, 12$$

Recordem que \bar{k}_{ij} és la força generalitzada Q_i necessària per produir un desplaçament generalitzat unitari q_j , quan tots els altres desplaçaments generalitzats són zero.

Fig. 14.8
Numeració de càrregues generalitzades en una barra sotmesa a forces i moments en els extrems.



L'equació de rigidesa l'escriurem com

$$Q_i = \bar{k}_{ij} u_j \quad i, j = 1, \dots, 12$$

Per la teoria de les barres que s'ha exposat al capítol 3, és clar que els desplaçaments generalitzats u_1 i u_7 depenen biunívocament dels esforços normals Q_1 i Q_7 ; igual passa amb els corresponents als moments torsors Q_4 i Q_{10} . Respecte dels desplaçaments generalitzats corresponents als moments flectors i als esforços de cisallament, si els eixos y, z són eixos principals d'inèrcia, es poden considerar independentment Q_2, Q_6, Q_8, Q_{12} , per un costat, i Q_3, Q_5, Q_9, Q_{11} , per l'altre.



Càlcul de les components associades als esforços normals

Són els que hem designat per Q_1 i Q_7 . Segons el que acabem de dir, Q_1 i Q_7 només provoquen u_1 i u_7 , i a l'inrevés. Així, a les columnes 1 i 7, només són diferents de zero els coeficients que ocupen les posicions 1 i 7. El procediment que seguirem per al càlcul dels coeficients de rigidesa és integrar les equacions de les deformacions associades als esforços considerats. Per la teoria de la tracció o compressió pura, sabem que

$$\frac{du}{dx} = -\frac{Q_1}{EA}$$

on u és el desplaçament d'una secció arbitrària de la barra (fig. 14.9). Integrant, obtenim

$$Q_1 x = -EAu + C_1$$

on C_1 és una constant arbitrària que s'ha de determinar aplicant les condicions de contorn. Per calcular $\bar{k}_{1,1}$, hem de fer $u = u_1$ per a $x = 0$ i $u = u_7 = 0$ per a $x = l$, essent l la longitud de la barra (fig. 14.9). N'obindrem

$$Q_1 = \frac{EA}{l} u_1$$

i

$$\bar{k}_{1,1} = \frac{Q_1}{u_1} = \frac{EA}{l}$$

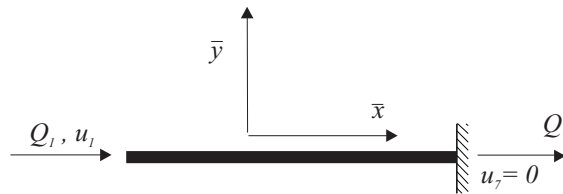


Fig. 14.9
Obtenció de $k_{1,1}$ i $k_{7,1}$.

De l'equilibri de la barra, s'obté que $Q_7 = -Q_1$; per tant,

$$\bar{k}_{7,1} = \frac{Q_7}{u_1} = -\frac{EA}{l}$$

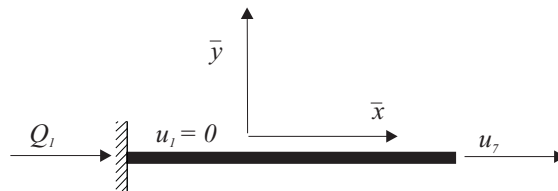


Fig. 14.10
Obtenció de $k_{7,7}$.

Per calcular $\bar{k}_{7,7}$, hem de fer $u = u_7$ per a $x = l$ i $u = u_1 = 0$ per a $x = 0$ (fig. 14.10), i n'obtenim

$$\bar{k}_{7,7} = \frac{Q_7}{u_7} = \frac{EA}{l}$$

que coincideix, naturalment, amb els resultats obtinguts a l'equació 14.4.

Càlcul de les components associades als moments torsors

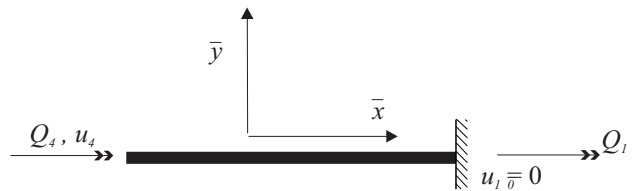
Són els que hem designat per Q_4 i Q_{10} . Pel mateix que acabem de dir per als esforços normals, a les columnes 4 i 10 només són diferents de zero els coeficients que ocupen els llocs 4 i 10. Per l'equació fonamental de la torsió,

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{Q_4}{GJ}$$

on θ és la rotació de la secció transversal al voltant de l'eix de la barra i J és el moment polar d'inèrcia de la secció respecte al centroid (fig. 14.11). Integrant, obtenim

$$Q_4 = -GJ\theta + C_1$$

Fig. 14.11
Obtenció de $k_{4,4}$ i $k_{10,4}$.



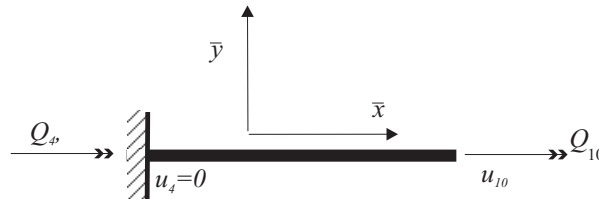
Imposant les condicions de contorn $\theta = 0$ a $x = l$ i $\theta = u_4$ a $x = 0$, obtenim

$$Q_4 = \frac{GJ}{l} u_4 \quad \text{i} \quad \bar{k}_{4,4} = \frac{Q_4}{u_4} = \frac{GJ}{l}$$

De l'equilibri de la barra, s'obté que $Q_{10} = -Q_4$; per tant,

$$\bar{k}_{10,4} = \frac{Q_{10}}{u_4} = -\frac{GJ}{l}$$

Fig. 14.12
Obtenció de $k_{10,10}$.



Per calcular $\bar{k}_{10,10}$, hem de fer $u = u_{10}$ per a $x = l$ i $u = u_4 = 0$, per a $x = 0$ (fig. 14.12)

$$\bar{k}_{10,10} = \frac{Q_{10}}{u_{10}} = \frac{GJ}{l}$$



Càlcul de les components associades als esforços de cisallament i als moments flectors

Calculem, primer, les components associades als esforços Q_2, Q_8, Q_6 i Q_{12} (fig. 14.13).

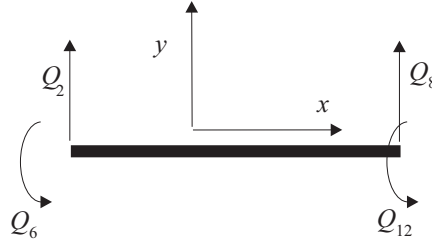


Fig. 14.13
Esforços de cisallament i moments flectors, primer grup.

El desplaçament lateral \bar{y} d'una secció transversal de la barra té dues components: la deguda a l'esforç de cisallament i la deguda al moment flector. La deguda a l'esforç de cisallament és el desplaçament mitjà ponderat definit a 13.22. El designarem simplement per y_s .

La component deguda al moment flector, l'anomenarem y_f .

$$y = y_s + y_f \quad (14.23)$$

Tinguen en compte que 14.23 està referida als eixos locals; no hi hem posat les barres per claredat en l'escriptura.

Per l'equació 13.22, tenim

$$dy_s = \frac{Q}{GA_{sy}} dx$$

que, en aquest cas, s'escriurà

$$dy_s = -\frac{Q_2}{GA_{sy}} dx \quad (14.24)$$

D'altra banda, per l'equació de la curvatura en la flexió pura 6.10, i aproximant-la per y''

$$\frac{d^2 y_f}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$$

que s'escriurà, en aquest cas (fig. 14.13),

$$\frac{d^2 y_f}{dx^2} = Q_2 x - Q_6 \quad (14.25)$$

Integrant 14.24 i 14.25 i substituint a 14.23,

$$EI_z y = Q_2 \frac{x^3}{6} - Q_6 \frac{x^2}{2} + C_1 x - \frac{Q_2 EI_z}{GA_{sy}} x + C_2 \quad (14.26)$$

on C_1 i C_2 són constants per determinar aplicant les condicions de contorn adequades. Fent $u_6 = u_8 = u_{12} = 0$ (fig. 14.14), trobarem les components de $\bar{\mathbf{K}}$ associades a u_2 és a dir, els elements de la segona columna de $\bar{\mathbf{K}}$.

Fig. 14.14
Obtenció de
 $k_{2,2}, k_{6,2}, k_{8,2}, k_{12,2}$ i $k_{2,2}$.



Que els girs u_6 i u_{12} siguin zero implica que el pendent degut al moment flector és zero als extrems de la barra, és a dir, $\frac{dy_f}{dx} = 0$ per a $x = 0, l$. Per tant, segons 14.23, tindrem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_s}{dx} = -\frac{Q_2}{GA_{sy}} \quad x = 0, l$$

Que el desplaçament u_8 sigui zero vol dir que $y = 0$ per a $x = l$. Imposant aquestes condicions a 14.26, s'obté

$$EI_z y = \frac{Q_2 x^3}{6} - \frac{Q_6 x^2}{2} - \frac{Q_2 \Phi_y x l^2}{12} + (1 + \Phi_y) \frac{l^3 Q_2}{12} \quad (14.27)$$

on $\Phi = \frac{12EI_z}{GA_{sy}l^2}$ i, a més, es compleix que $Q_6 = \frac{Q_2 l}{2}$. A Φ_y s'anomena *paràmetre de deformació per cisallament* (en aquest cas, respecte de l'eix y).

Imposant l'equilibri a la barra, obtenim

$$Q_8 = -Q_2$$

i

$$Q_{12} = Q_2 l - Q_6$$

Tenint en compte que, per a $x = 0, y = u_2$, s'obté de 14.27

$$u_2 = (1 + \Phi_y) \frac{l^3 Q_2}{12EI_z}$$

Així doncs, tindrem

$$\bar{k}_{2,2} = \frac{Q_2}{u_2} = \frac{12EI_z}{(1 + \Phi_y)l^3}$$

$$\bar{k}_{6,2} = \frac{Q_6}{u_2} = \frac{Q_2 l}{2u_2} = \frac{6EI_z}{(1 + \Phi_y)l^2}$$



$$\bar{k}_{8,2} = \frac{Q_8}{u_2} = \frac{-12EI_z}{(1 + \Phi_y)l^3}$$

$$\bar{k}_{12,2} = \frac{Q_{12}}{u_2} = \frac{-Q_6 + Q_2l}{u_2} = \frac{6EI_z}{(1 + \Phi_y)l^2}$$

La resta d'elements de la segona columna són zero.

Canviant les condicions de contorn per $u_2 = u_6 = u_{12} = 0$ (fig. 14.15), trobem les components de $\bar{\mathbf{K}}$ associades a u_8 , és a dir, els elements de la vuitena columna de $\bar{\mathbf{K}}$, i obtenim

$$\bar{k}_{8,8} = \bar{k}_{2,2} = \frac{Q_2}{u_2} = \frac{12EI_z}{(1 + \Phi_y)l^3}$$

$$\bar{k}_{12,8} = -\bar{k}_{6,2} = \frac{-6EI_z}{(1 + \Phi_y)l^2}$$



Fig. 14.15
Obtenció de $k_{8,8}$ i $k_{12,8}$.

Hem calculat les components de $\bar{\mathbf{K}}$ associades a u_2 i a u_8 . Calculem ara les associades a u_6 i a u_{12} , és a dir, a les rotacions als extrems de la barra. Per calcular les associades a u_6 , igualem a zero els altres desplaçaments generalitzats, $u_2 = u_8 = u_{12} = 0$ (fig. 14.16).

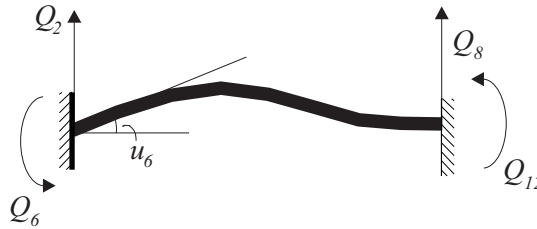


Fig. 14.16
Obtenció de $k_{6,6}$, $k_{8,6}$, $k_{12,6}$ i $k_{12,12}$.

Que $u_2 = u_8 = 0$ es tradueix en $y = 0$ per a $x = 0, l$ i $u_{12} = 0$ vol dir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_s}{dx} = -\frac{Q_2}{GA_{yy}} \quad x = l$$

Substituint aquestes condicions a 14.26, s'obté

$$EI_z y = \frac{Q_2}{6}(x^3 - l^2x) + \frac{Q_6}{2}(lx - x^2) \quad (14.28)$$

i

$$Q_2 = \frac{6Q_6}{(4 + \Phi_y)l}$$

D'altra banda, per a $x = 0$, $u_6 = \frac{dy_f}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy_s}{dx}$. Utilitzant 14.28, s'obté, per a u_6

$$u_6 = \frac{Q_6(1 + \Phi_y)l}{EI_z(4 + \Phi_y)}$$

Així doncs, tindrem

$$\bar{k}_{6,6} = \frac{Q_6}{u_6} = \frac{(4 + \Phi_y)EI_z}{(1 + \Phi_y)l}$$

$$\bar{k}_{8,6} = \frac{Q_8}{u_6} = -\frac{Q_2}{u_6} = \frac{-6EI_z}{(1 + \Phi_y)l^2}$$

$$\bar{k}_{12,6} = \frac{Q_{12}}{u_6} = \frac{-Q_6 + Q_2l}{u_6} = \frac{(2 - \Phi_y)EI_z}{(1 + \Phi_y)l}$$

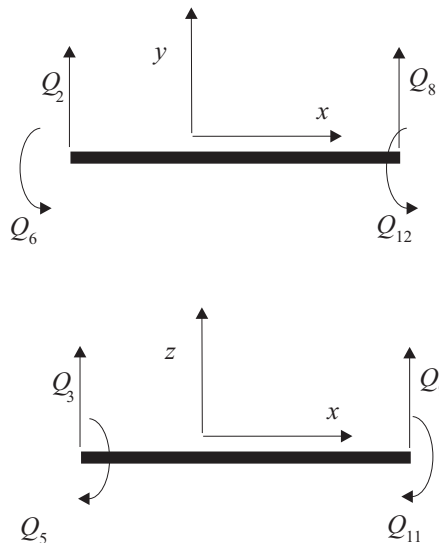
Si permetem el gir a la dreta i mantenim els altres tres desplaçaments generalitzats a zero, és evident, per simetria, que

$$\bar{k}_{12,12} = \bar{k}_{6,6} = \frac{Q_6}{u_6} = \frac{(4 + \Phi_y)EI_z}{(1 + \Phi_y)l}$$

A les columnes 2, 6, 8 i 12, els coeficients que no ocupen les posicions 2, 6, 8 o 12 són zero, ja que hi ha una relació biunívoca entre els esforços i els desplaçaments associats.

Calculem ara les components associades als esforços Q_3, Q_9, Q_5 i Q_{11} . Els coeficients de rigidesa associats a aquestes quatre càrregues generalitzades, o als seus quatre desplaçaments generalitzats, els podem obtenir directament per analogia amb els obtinguts per als esforços Q_2, Q_8, Q_6 i Q_{12} . Hi ha, però, una diferència que s'aprecia a la figura 14.17: els moments flectors tenen, respecte dels esforços de cisallament, sentit contrari al que tenien en el cas anterior.

Fig. 14.17
Esforços de cisallament i
moments flectors, primer
i segon grup.





Podem deduir, doncs, que canviant A_{sy} per A_{sz} , I_z per I_y i Φ_y per Φ_z ,

$$\begin{aligned}\bar{k}_{3,3} &= \bar{k}_{2,2} \\ \bar{k}_{5,3} &= -\bar{k}_{6,2} \\ \bar{k}_{9,3} &= \bar{k}_{8,2} \\ \bar{k}_{11,3} &= -\bar{k}_{12,2} \\ \bar{k}_{9,9} &= \bar{k}_{8,8} \\ \bar{k}_{11,9} &= -\bar{k}_{12,8} \\ \bar{k}_{5,5} &= \bar{k}_{11,11} = \bar{k}_{6,6} \\ \bar{k}_{9,5} &= -\bar{k}_{8,6} \\ \bar{k}_{11,5} &= \bar{k}_{12,6}\end{aligned}$$

A les columnes 3, 5, 9 i 11, els coeficients que no ocupen les posicions 3, 5, 9 o 11 són zero, ja que hi ha una relació biunívoca entre els esforços i els desplaçaments associats.

Recopilant tots els coeficients obtinguts, escriurem $\bar{\mathbf{K}}$, tenint en compte que és simètrica, com

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+\Phi_z)l^2} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{(1+\Phi_y)l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+\Phi_z)l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)l^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{(1+\Phi_z)l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+\Phi_z)l^2} & 0 & \frac{(2-\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)l^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)l} & 0 & \frac{-6EI_z}{(1+\Phi_y)l^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{simètrica}$$

(14.29)

La matriu de l'equació 14.29 és, doncs, la matriu de rigidesa en coordenades locals d'una barra tridimensional en el cas més general possible, és a dir, considerant les deformacions produïdes pels esforços normals i de cisallament i pels moments torsors i flectors. Els paràmetres de deformació per cisallament es poden posar en la forma [10]

$$\begin{aligned}\Phi_y &= \frac{12EI_z}{GA_{sy}l^2} = 24(1+\nu) \frac{A}{A_{sy}} \left(\frac{r_z}{l} \right)^2 \\ \Phi_z &= \frac{12EI_y}{GA_{sz}l^2} = 24(1+\nu) \frac{A}{A_{sz}} \left(\frac{r_y}{l} \right)^2\end{aligned}$$



on r_z i r_y són els *radis de gir* de la secció transversal respecte dels eixos z i y , respectivament. En cas que aquests radis de gir siguin petits en relació amb la longitud l de la barra, cosa que es dona en barres primes, els paràmetres Φ_y i Φ_z es poden prendre com a zero, és a dir, l'efecte dels esforços de cisallament en les deformacions (i en els desplaçaments) es pot considerar zero. Tindrem, en aquest cas, per la matriu de rigidesa

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{pmatrix} \quad \text{simètrica} \quad (14.30)$$

La transformació a coordenades globals de l'equació tridimensional 14.29 es fa segons

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^t \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}$$

on \mathbf{T} és la matriu formada pels blocs de la matriu de rotació \mathbf{R} dels cosinus directors dels eixos respecte de x, y, z , i zeros a la resta.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

on cada element és un bloc de 3×3 components. El primer bloc \mathbf{R} (superior esquerre) afecta les components del desplaçament de l'extrem i de la barra; el segon bloc \mathbf{R} afecta les components del gir de l'extrem i , i el tercer bloc i el quart afecten les components del desplaçament i el gir, respectivament, de l'extrem j . La resta del procés, és a dir, l'acoblament, l'aplicació de les condicions de contorn i la resolució és idèntic al que s'ha descrit per a les estructures articulades.



En el cas bidimensional, hi haurà un esforç normal, un esforç de cisallament i un moment flector. Prenent la numeració indicada a la figura 14.18 i considerant negligibles els efectes de l'esforç de cisallament, la matriu de rigidesa serà

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (14.31)$$

i l'equació de rigidesa s'escriurà com

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

o bé, en components respecte dels eixos locals $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$,

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix} \quad (14.32)$$

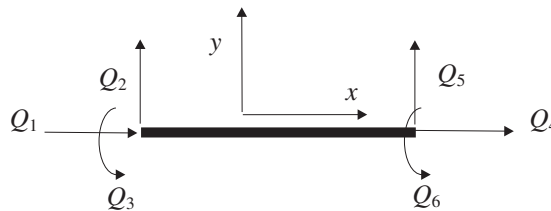


Fig. 14.18
Barra en el cas
bidimensional.



T s'escriurà com

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{pmatrix}$$

on el bloc superior esquerre afecta les components (dos desplaçaments i un gir) de l'extrem i , i el bloc inferior dret les de j . És clar que, en aquest cas (fig. 14.5),

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posant $c = \cos \alpha$ i $s = \sin \alpha$, essent α l'angle format per \bar{x} i x ,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.33)$$

De l'equació 14.32 es pot extraure la relació següent

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & \frac{-6}{l} & 2 \\ \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix} \quad (14.34)$$

que és vàlida, tant si hi ha deformacions per esforços normals, com si no n'hi ha. Per tant, si no considerem el grau de llibertat corresponent al desplaçament axial, només



tindrem dos graus de llibertat per a cada nus: el desplaçament transversal i el gir; així, la matriu de rigidesa de la barra en coordenades locals serà de 4×4 elements i l'escriurem com

$$\begin{pmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & & & & \text{sim} \\ & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & & \\ & \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & \\ & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{pmatrix} \quad (14.35)$$

que es pot posar, en la forma més simple,

$$\frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & & & & \text{sim} \\ & \frac{6}{l} & 4 & & \\ & \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{12}{l^2} & \\ & \frac{6}{l} & 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{pmatrix} \quad (14.36)$$

El canvi de coordenades locals a globals ve donat per la relació (fig. 14.5)

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu T de transformació és

$$\begin{pmatrix} -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.37)$$

Observem que, si utilitzem l'equació 14.34, no tenim informació de les deformacions per esforços normals. Si volem, per exemple, imposar que aquestes deformacions són zero, haurem d'incorporar aquesta condició en forma d'equació de lligadura al final del procés de càlcul. Com ja hem dit, el procediment que seguirem en aquests casos és el dels multiplicadors de Lagrange.

De vegades, hi ha estructures amb nusos en què es connecten barres amb diferents graus de llibertat; per exemple, el cas de la figura 14.19. En el procediment d'acoblament

de la matriu de rigidesa de l'estructura, hem de tenir en compte que un nus com el de la figura té nou graus de llibertat: tres desplaçaments, tres girs del nus rígid i tres girs del nus connectat mitjançant el passador. Si l'estructura és bidimensional, un nus com el de la figura té quatre graus de llibertat: dos desplaçaments, un gir del nus rígid i un gir del nus articulat.

Fig. 14.19
Nus amb dos graus de llibertat per a les rotacions.



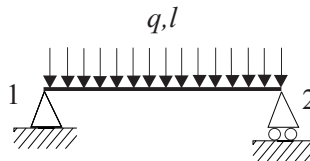
Finalment, cal indicar que, si hem de resoldre l'estructura a mà utilitzant el mètode matricial, és convenient partir de la matriu de rigidesa reduïda (la corresponent als graus de llibertat no prescrits). Anomenarem aquest procediment: *mètode matricial reduït*.

14.4. Problemes

Problema 14.1

Trobeu els girs dels extrems de la barra de la figura 14.20.

Fig. 14.20



Solució:

Procediment: mètode matricial

L'equació de rigidesa en coordenades locals de la barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} f_{yi} \\ M_i \\ f_{yj} \\ M_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

on s'han suprimit, per comoditat, els sobreratllats. f_{yi} , M_i , f_{yj} , M_j són les forces i els moments externs totals aplicats als punts extrems i i j , respectivament, que seran, en aquest cas les reaccions externes i les càrregues equivalents creades per les càrregues repartides (fig. 14.21). Aquestes càrregues equivalents són les que s'esmenten a l'apartat 14.3 i s'han obtingut al problema 12.5

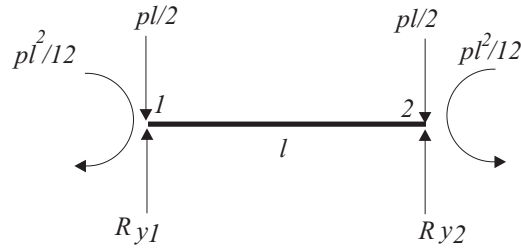


Fig. 14.21

Així, l'equació de rigidesa de la barra s'escriurà com

$$\begin{pmatrix} R_{y1} - pl/2 \\ -pl^2/12 \\ R_{y2} - pl/2 \\ pl^2/12 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 12/l^2 & 6/l & -12/l^2 & 6/l \\ 6/l & 4 & -6/l & 2 \\ -12/l^2 & -6/l & 12/l^2 & -6/l \\ 6/l & 2 & -6/l & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

on R_{y1} i R_{y2} són les reaccions als punts 1 i 2, respectivament. Les condicions de contorn són

$$\begin{aligned} u_{y1} &= 0 \\ u_{y2} &= 0 \end{aligned}$$

Així doncs, eliminant les files i columnes 1 i 3, obtenim

$$\begin{pmatrix} -pl^2/12 \\ pl^2/12 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

i, resolent

$$\theta_1 = \frac{-pl^3}{24EI} \quad \curvearrowright$$

$$\theta_2 = \frac{pl^3}{24EI} \quad \curvearrowleft$$

Substituint a l'equació de rigidesa completa,

$$\begin{pmatrix} R_{y1} - pl/2 \\ -pl^2/12 \\ R_{y2} - pl/2 \\ pl^2/12 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 12/l^2 & 6/l & -12/l^2 & 6/l \\ 6/l & 4 & -6/l & 2 \\ -12/l^2 & -6/l & 12/l^2 & -6/l \\ 6/l & 2 & -6/l & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-pl^3}{24EI} \\ 0 \\ \frac{pl^3}{24EI} \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

$$R_{y1} = pl/2$$

$$R_{y2} = pl/2$$

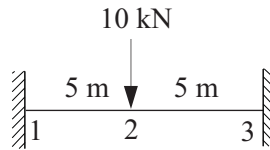
resultat que és evident per consideracions de simetria.



Problema 14.2

Calculeu les reaccions i la fletxa del punt 2 de la figura 14.22. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$

Fig. 14.22

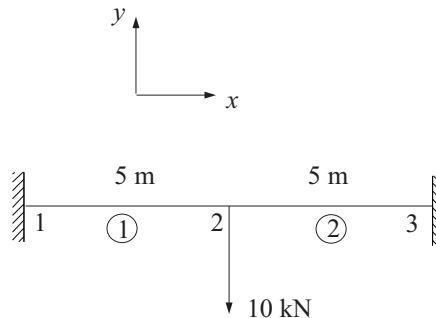


Solució:

Procediment: mètode matricial reduït

En comptes de calcular la càrrega equivalent de la força de 10 kN, considerarem dues barres; així, la força s'aplicarà al nus 2 (fig. 14.23)

Fig. 14.23



L'estructura té dos graus de llibertat no prescrits: el desplaçament vertical i el gir del nus 2 (en realitat, per simetria, podríem avançar que el gir del nus 2 és zero, però el deixarem com a grau de llibertat).

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

D'altra banda, els eixos locals els fem coincidir amb els globals en les dues barres. Així, la matriu de rigidesa reduïda en coordenades globals per a la barra 1 serà

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} u_{y2} & \theta_2 \\ 0,48 & -1,2 \\ -1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$



i per a la 2

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} u_{y2} & \theta_2 \\ 0,48 & 1,2 \\ 1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

sumant per als dos graus de llibertat, obtenim la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura

$$\mathbf{K} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 0,96 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

L'equació de rigidesa reduïda serà

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 0,96 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

d'on, resolent, obtenim

$$\begin{aligned} u_{y2} &= -0,00052 \text{ m} \downarrow \\ \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Problema 14.3

Calculeu el desplaçament vertical i el gir de la secció 2 de la barra de la figura 14.24. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

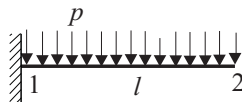


Fig. 14.24

Solució:

Procediment: mètode matricial

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

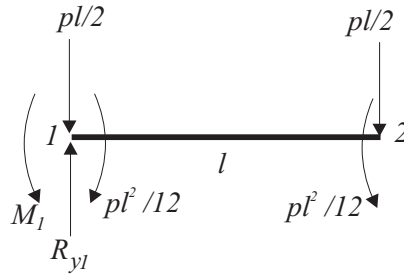
$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Suprimint per comoditat les barres superiors, escriurem

$$\begin{pmatrix} f_{yi} \\ M_i \\ f_{yj} \\ M_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

on f_{yi}, M_i, f_{yj}, M_j són les forces i els moments externs totals aplicats en els punts i i j , respectivament, que seran, en aquest cas, les reaccions externes i les càrregues equivalents creades per les càrregues repartides (fig. 14.25). Aquestes càrregues equivalents són les que s'esmenten a l'apartat 14.3 i s'han obtingut al problema 12.5. Tindrem, doncs, en aquest cas,

Fig. 14.25



$$\begin{pmatrix} R_{y1} - \frac{pl}{2} \\ M_1 - \frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl}{2} \\ \frac{pl^2}{12} \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Les condicions de contorn són

$$\begin{aligned} u_{y1} &= 0 \\ \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Així doncs, eliminant les files i columnes 1 i 2, obtenim

$$\begin{pmatrix} -pl/2 \\ pl^2/12 \end{pmatrix} = EI/l \begin{pmatrix} 12/l^2 & -6/l \\ -6/l & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$



i resolent,

$$u_{y2} = -\frac{pl^4}{8EI} \downarrow$$

$$\theta_2 = -\frac{pl^3}{6EI} \curvearrowright$$

Substituint a l'equació de rigidesa completa,

$$\begin{pmatrix} R_{y1} - \frac{pl}{2} \\ M_1 - \frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl}{2} \\ \frac{pl^2}{12} \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & \frac{-6}{l} & 2 \\ \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{pl^4}{8EI} \\ -\frac{pl^3}{6EI} \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

$$R_{y1} = pl$$

$$M_1 = \frac{pl^2}{2}$$

Problema 14.4

Calculeu els esforços a les barres i els desplaçaments dels vèrtexs de l'estructura (fig. 14.26). Totes les barres tenen el mateix mòdul de Young E i la mateixa secció transversal A .

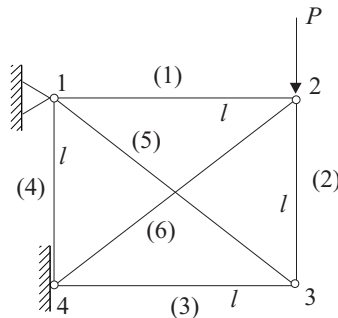


Fig. 14.26

Solució:

Procediment: mètode matricial

Escrivim les equacions de rigidesa en coordenades globals per a cada una de les barres.



Per a la barra 1, $c = 1$ i $s = 0$; per tant,

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Per a la barra 2, $c = 0$ i $s = -1$

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Per a la barra 3, $c = -1$ i $s = 0$

$$\begin{pmatrix} f_{x3}^{(3)} \\ f_{y3}^{(3)} \\ f_{x4}^{(3)} \\ f_{y4}^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x3}^{(3)} \\ u_{y3}^{(3)} \\ u_{x4}^{(3)} \\ u_{y4}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Per a la barra 4, $c = 0$ i $s = -1$

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(4)} \\ f_{y1}^{(4)} \\ f_{x4}^{(4)} \\ f_{y4}^{(4)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(4)} \\ u_{y1}^{(4)} \\ u_{x4}^{(4)} \\ u_{y4}^{(4)} \end{pmatrix}$$

Per a la barra 5, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $s = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(5)} \\ f_{y1}^{(5)} \\ f_{x3}^{(5)} \\ f_{y3}^{(5)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(5)} \\ u_{y1}^{(5)} \\ u_{x3}^{(5)} \\ u_{y3}^{(5)} \end{pmatrix}$$

I, per a la barra 6, $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $s = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(6)} \\ f_{y2}^{(6)} \\ f_{x4}^{(6)} \\ f_{y4}^{(6)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(6)} \\ u_{y2}^{(6)} \\ u_{x4}^{(6)} \\ u_{y4}^{(6)} \end{pmatrix}$$



El procés d'acoblament consisteix primer a augmentar les equacions de rigidesa amb els graus de llibertat que falten en cada una d'elles fins a completar el vector de desplaçaments generalitzats de l'estructura. Observem que l'estructura té vuit graus de llibertat: dos desplaçaments per a cada nus; per tant, el vector de desplaçaments generalitzats tindrà vuit components.

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{x3}^{(3)} \\ f_{y3}^{(3)} \\ f_{x4}^{(3)} \\ f_{y4}^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(4)} \\ f_{y1}^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{x4}^{(4)} \\ f_{y4}^{(4)} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(5)} \\ f_{y1}^{(5)} \\ 0 \\ 0 \\ f_{x3}^{(5)} \\ f_{y3}^{(5)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA0,5}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(6)} \\ f_{y2}^{(6)} \\ 0 \\ 0 \\ f_{x4}^{(6)} \\ f_{y4}^{(6)} \end{pmatrix} = \frac{EA0,5}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

A l'equació de la barra 1, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 5, 6, 7 i 8 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració. A l'equació de la barra 2, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 1, 2, 7 i 8 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració. A l'equació de la barra 3, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 1, 2, 3 i 4 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració. A l'equació de la barra 4, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 3, 4, 5 i 6 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració. A l'equació de la barra 5, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 3, 4, 7 i 8 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració. A l'equació de la barra 6, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 1, 2, 5 i 6 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració.

Imposem l'equilibri de forces als nusos

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}^{(e)} = \sum \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1,353 & -0,353 & -1 & 0 & -0,353 & 0,353 & 0 & 0 \\ -0,353 & 1,353 & 0 & 0 & 0,353 & -0,353 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1,353 & 0,353 & 0 & 0 & -0,353 & -0,353 \\ 0 & 0 & 0,353 & 1,353 & 0 & -1 & -0,353 & -0,353 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,353 & -0,353 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,353 & 1,353 & 0 & 0 \\ -0,353 & 0,353 & -0,353 & -0,353 & -1 & 0 & 1,353 & 0,353 \\ 0,353 & -1,353 & -0,353 & -0,353 & 0 & 0 & 0,353 & 1,353 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix} \quad (14.38)$$

Les condicions de contorn per als desplaçaments (condicions de suport) són

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{x4} = 0$$

mentre que les forces externes aplicades són

$$\begin{aligned} f_{x2} &= f_{x3} = f_{y3} = f_{y4} = 0 \\ f_{y2} &= -P \end{aligned}$$

Per aplicar aquestes condicions, eliminem les files i columnes 1, 2 i 7 (les corresponents als desplaçaments coneguts), substituïm les forces conegudes i n'obtenim

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1,353 & 0,353 & 0 & 0 & -0,353 \\ 0,353 & 1,353 & 0 & -1 & -0,353 \\ 0 & 0 & 1,353 & -0,353 & 0 \\ 0 & -1 & -0,353 & 1,353 & 0 \\ -0,353 & -0,353 & 0 & 0 & 1,353 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix}$$

Resolent,

$$\frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0,896 & -0,5 & -1,13 & -0,396 & 0,103 \\ -0,5 & 2,416 & 0,5 & 1,916 & 0,5 \\ -0,103 & 0,5 & 0,896 & 0,603 & 0,103 \\ -0,396 & 1,916 & 0,603 & 2,313 & 0,396 \\ 0,103 & 0,5 & 0,103 & 0,396 & 0,896 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

$$u_{x2} = \frac{l}{EA} 0,5P$$

$$u_{y2} = \frac{l}{EA} (-2,416P)$$

$$u_{x3} = \frac{l}{EA} (-0,5P)$$

$$u_{y3} = \frac{l}{EA} (-1,916P)$$

$$u_{y4} = \frac{l}{EA} (-0,5P)$$

I substituïnt a 14.38

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,353 & -0,353 & -1 & 0 & -0,353 & 0,353 & 0 & 0 \\ -0,353 & 1,353 & 0 & 0 & 0,353 & -0,353 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1,353 & 0,353 & 0 & 0 & -0,353 & -0,353 \\ 0 & 0 & 0,353 & 1,353 & 0 & -1 & -0,353 & -0,353 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,353 & -0,353 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,353 & 1,353 & 0 & 0 \\ -0,353 & 0,353 & -0,353 & -0,353 & -1 & 0 & 1,353 & 0,353 \\ 0,353 & -1,353 & -0,353 & -0,353 & 0 & 0 & 0,353 & 1,353 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5P \\ -2,416P \\ -0,5P \\ -1,916P \\ 0 \\ -0,5P \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1P \\ 0,1P \\ 0 \\ -0,1P \\ 0 \\ 0 \\ 0,1P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un cop tenim les forces externes i els desplaçaments, calculem els esforços interns. Per fer-ho, apliquem la matriu de rigidesa en coordenades locals (eq. 14.3) a cadascuna de les barres.

Per a la barra 1,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} &= \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{pmatrix} = \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5P \\ -2,416P \end{pmatrix} = \\ &= \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5P \\ -2,416P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x1} \\ \bar{f}_{y1} \\ \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5P \\ -2,416P \end{pmatrix} \quad (14.39)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x1} &= -0,5P \\ \bar{f}_{x2} &= 0,5P \end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 1 actua una tracció de valor $0,5P$.

Per a la barra 2,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(2)} &= \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5P \\ -2,416P \\ -0,5P \\ -1,916P \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} 2,416P \\ 0,5P \\ 1,916P \\ -0,5P \end{pmatrix} \end{aligned}$$



i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \\ \bar{f}_{x3} \\ \bar{f}_{y3} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 2,416P \\ 0,5P \\ 1,916P \\ -0,5P \end{pmatrix} \quad (14.40)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x2} &= 0,5P \\ \bar{f}_{x3} &= -0,5P \end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 2 actua una compressió de valor $0,5P$.

Per a la barra 3,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(3)} &= \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,5P \\ -1,916P \\ 0 \\ -0,5P \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} 0,5P \\ 1,916P \\ 0 \\ 0,5P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x3} \\ \bar{f}_{y3} \\ \bar{f}_{x4} \\ \bar{f}_{y4} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0,5P \\ 1,916P \\ 0 \\ 0,5P \end{pmatrix} \quad (14.41)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x3} &= 0,5P \\ \bar{f}_{x4} &= -0,5P \end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 3 actua una compressió de valor $0,5P$.

Per a la barra 4,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(4)} &= \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5P \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5P \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x1} \\ \bar{f}_{y1} \\ \bar{f}_{x4} \\ \bar{f}_{y4} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5P \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.42)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x1} &= -0,5P \\ \bar{f}_{x4} &= 0,5P \end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 4 actua una tracció de valor $0,5P$.

Per a la barra 5,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(5)} &= \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0,707 & -0,707 & 0 & 0 \\ 0,707 & 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,707 & -0,707 \\ 0 & 0 & 0,707 & 0,707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,5P \\ -1,916P \end{pmatrix} = \\ &= \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ -1,708P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x1} \\ \bar{f}_{y1} \\ \bar{f}_{x3} \\ \bar{f}_{y3} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ -1,708P \end{pmatrix} \quad (14.43)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x1} &= -P/\sqrt{2} \\ \bar{f}_{x4} &= P/\sqrt{2} \end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 5 actua una tracció de valor $P/\sqrt{2}$.

Per a la barra 6,

$$\bar{u}^{(6)} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} -0,707 & -0,707 & 0 & 0 \\ 0,707 & -0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,707 & -0,707 \\ 0 & 0 & 0,707 & -0,707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5P \\ -2,416P \\ 0 \\ -0,5P \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} 1,354P \\ 2,016P \\ 0,353P \\ 0,353P \end{pmatrix}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \\ \bar{f}_{x4} \\ \bar{f}_{y4} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 1,354P \\ 2,016P \\ 0,353P \\ 0,353P \end{pmatrix} \quad (14.44)$$

Per tant,

$$\bar{f}_{x2} = P/\sqrt{2}$$

$$\bar{f}_{x4} = -P/\sqrt{2}$$

és a dir, sobre la barra 6 actua una compressió de valor $P/\sqrt{2}$.

Problema 14.5

Calculeu els moments i les forces equivalents en els extrems de la barra de la figura 14.27, considerant negligibles la deformació per esforços normals i per cisallament.

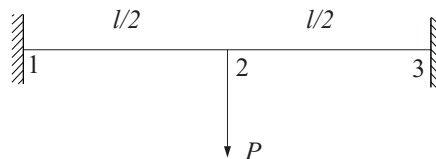


Fig. 14.27

Solució:

Procediment: mètode matricial reduït

Considerem dues barres; així, P està aplicada en un nus. Per simetria, les forces als extrems són iguals i el seu valor és $P/2$. Els moments també són iguals, però s'han de calcular. La numeració i les reaccions s'indiquen a la figura 14.28

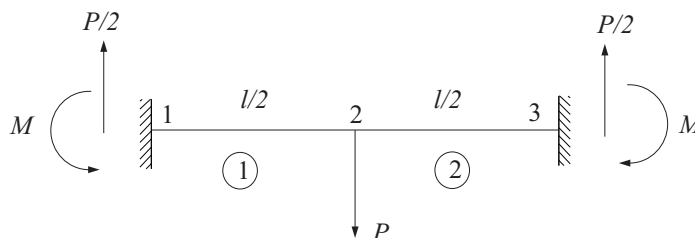


Fig. 14.28



L'estructura té dos graus de llibertat no prescrits: el desplaçament vertical i el gir del nus 2. (En realitat, per simetria podríem avançar que el gir del nus 2 és zero, però el deixarem com a grau de llibertat).

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

D'altra banda, els eixos locals els fem coincidir amb els globals a les dues barres. Així, la matriu de rigidesa reduïda en coordenades globals per a la barra 1 serà

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{l/2} \begin{pmatrix} \frac{12}{(l/2)^2} & \frac{-6}{l/2} \\ \frac{-6}{l/2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

que escriurem com

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{96}{l^2} & \frac{-24}{l} \\ \frac{-24}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

i per a la 2

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{l/2} \begin{pmatrix} \frac{12}{(l/2)^2} & \frac{6}{l/2} \\ \frac{6}{l/2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

que escriurem com

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{96}{l^2} & \frac{24}{l} \\ \frac{24}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Sumant per als dos graus de llibertat, obtenim la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{192}{l^2} & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

L'equació de rigidesa reduïda serà

$$\begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{192}{l^2} & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

d'on, resolent, obtenim

$$u_{2y} = \frac{-Pl^3}{192EI}$$

$$\theta_2 = 0$$

Aplicant l'equació de rigidesa per a la barra 1

$$\begin{pmatrix} P/2 \\ M \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{96}{l^2} & \frac{24}{l} & \frac{-96}{l^2} & \frac{24}{l} \\ \frac{24}{l} & 4 & \frac{-24}{l} & 2 \\ \frac{-96}{l^2} & \frac{-24}{l} & \frac{96}{l^2} & \frac{-24}{l} \\ \frac{24}{l} & 2 & \frac{-24}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-Pl^3}{192EI} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on

$$M = \frac{Pl}{8}$$

Problema 14.6

Les dues barres 2-3 i 1-3 de la figura 14.29 estan connectades mitjançant un passador i lligades a l'exterior també amb passadors. Sabent que les seccions transversals són $A_{23} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{13} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ i que els mòduls de Young respectius són $E_{23} = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ i $E_{13} = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, trobeu el desplaçament del punt 3.

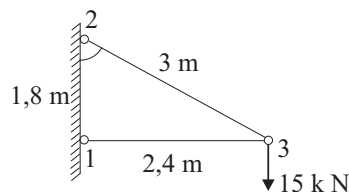


Fig. 14.29

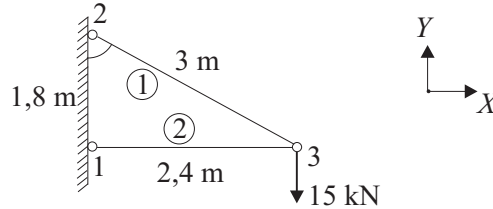


Solució:

Procediment: mètode matricial

Primer numerem les barres i els nusos (fig. 14.30). Prenem com a eixos globals X, Y els que s'indiquen a la figura

Fig. 14.30



Per a la barra 1, $\cos \alpha = c = 2,4/3$ i $\sin \alpha = s = -1,8/3$; per tant, la matriu de rigidesa en coordenades globals és

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{E^1 A^1}{l^1} \begin{pmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,125 \cdot 10^{-4}}{3} \begin{pmatrix} \left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & \frac{-1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & -\left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} \\ \frac{-1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & \left(\frac{1,8}{3}\right)^2 & \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & -\left(\frac{1,8}{3}\right)^2 \\ -\left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & \left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & -\frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} \\ \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & -\left(\frac{1,8}{3}\right)^2 & -\frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & \left(\frac{1,8}{3}\right)^2 \end{pmatrix}$$

i l'equació de rigidesa

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ f_{x3}^{(1)} \\ f_{y3}^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,125 \cdot 10^{-4}}{3} \begin{pmatrix} \left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & \frac{-1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & -\left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} \\ \frac{-1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & \left(\frac{1,8}{3}\right)^2 & \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & -\left(\frac{1,8}{3}\right)^2 \\ -\left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & \left(\frac{2,4}{3}\right)^2 & -\frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} \\ \frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & -\left(\frac{1,8}{3}\right)^2 & -\frac{1,8 \cdot 2,4}{3 \cdot 3} & \left(\frac{1,8}{3}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \\ u_{x3}^{(1)} \\ u_{y3}^{(1)} \end{pmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{pmatrix} 1,333 & -1 & -1,333 & 1 \\ -1 & 0,75 & 1 & -0,75 \\ -1,333 & 1 & 1,333 & -1 \\ 1 & -0,75 & -1 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \\ u_{x3}^{(1)} \\ u_{y3}^{(1)} \end{pmatrix}$$



Per a la barra 2, $c = 1$ i $s = 0$; per tant, la matriu de rigidesa en coordenades globals és

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{E^2 A^2}{l^2} \begin{pmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{pmatrix} = \frac{1,2 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2,4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i l'equació de rigidesa

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(2)} \\ f_{y1}^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1,2 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2,4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(2)} \\ u_{y1}^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(2)} \\ u_{y1}^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \end{pmatrix}$$

El procés d'acoblament consisteix primer a augmentar les equacions amb els graus de llibertat que falten fins a completar el vector de desplaçaments generalitzats. Observem que l'estructura té sis graus de llibertat: dos desplaçaments per a cada nus; per tant, el vector de desplaçaments generalitzats tindrà sis components.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ f_{x3}^{(1)} \\ f_{y3}^{(1)} \end{pmatrix} = 10^7 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,333 & -1 & -1,333 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0,75 & 1 & 0,75 \\ 0 & 0 & -1,333 & 1 & 1,333 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,75 & -1 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(2)} \\ f_{y1}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = 10^7 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix}$$

A l'equació de la barra 1, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 1 i 2 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes 1 i 2. A l'equació de la barra 2, hem afegit els graus de llibertat que ocupen les posicions 3 i 4 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes 3 i 4. D'altra banda, ja hem eliminat els superíndexs per fer complir la compatibilitat en els desplaçaments; les equacions anteriors es poden escriure com

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{u}$$



A continuació, imposen la condició d'equilibri a cada un dels nusos, és a dir,

$$\mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} = (\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)})\mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix} = 10^7 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,333 & -1 & -1,333 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0,75 & 1 & -0,75 \\ -10 & 0 & -1,333 & 1 & 11,333 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,75 & -1 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} \quad (14.45)$$

que constitueix l'equació de rigidesa de l'estructura. Les condicions de contorn per als desplaçaments (condicions de suport) són

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{x2} = u_{y2} = 0 \quad (14.46)$$

mentre que les forces externes aplicades són

$$f_{x3} = 0 \quad f_{y3} = -15.000\text{N}$$

Per aplicar aquestes condicions, eliminem les files i columnes 1, 2, 3 i 4 (les corresponents als desplaçaments coneguts)

$$10^7 \begin{pmatrix} 11,333 & -1 \\ -1 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15.000 \end{pmatrix} \quad (14.47)$$

i, resolent, obtenim

$$u_{x3} = -201,3 \cdot 10^{-6} \text{m} = -0,2 \text{mm}$$

$$u_{y3} = -2.281,8 \cdot 10^{-6} \text{m} = -2,28 \text{mm}$$

Substituint 14.46 i 14.47 a 14.45,

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ 0 \\ -15.000 \end{pmatrix} = 10^7 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,333 & -1 & -1,333 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0,75 & 1 & -0,75 \\ -10 & 0 & -1,333 & 1 & 11,333 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,75 & -1 & 0,75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -201,3 \\ -2.281,8 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ 0 \\ -15.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.130 \\ 0 \\ -20.126,6 \\ 15.094,5 \\ -3,329 \\ -15.094,5 \end{pmatrix}$$



Es pot observar que el sumatori de forces externes és zero, tant en la direcció x com en la y , com era d'esperar. D'altra banda, els valors difereixen lleugerament dels obtinguts aplicant l'estàtica; el motiu és haver truncat el nombre de decimals en els càlculs.

Un cop tenim les forces externes i els desplaçaments, calculem els esforços interns. Per fer-ho, apliquem la matriu de rigidesa en coordenades locals 14.3 a cada una de les barres.

Per a la barra 1, $c = 2,4/3$ i $s = -1,8/3$; per tant,

$$\bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2,4}{3} & \frac{-1,8}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1,8}{3} & \frac{2,4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2,4}{3} & \frac{-1,8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1,8}{3} & \frac{2,4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0002 \\ -0,00228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,208 \cdot 10^{-6} \\ -1,944 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x2} \\ \bar{f}_{y2} \\ \bar{f}_{x3} \\ \bar{f}_{y3} \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,125 \cdot 10^{-4}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,208 \cdot 10^{-6} \\ -1,944 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \quad (14.48)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x2} &= -25.160 \text{ N} \\ \bar{f}_{x3} &= 25.160 \text{ N} \end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 1 actúa una tracció de 25.160 N.

Per a la barra 2, $c = 1$ i $s = 0$; per tant,

$$\bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0002 \\ -0,00228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0002 \\ -0,00228 \end{pmatrix}$$

i, així, l'equació de rigidesa en coordenades locals és

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{x1} \\ \bar{f}_{y1} \\ \bar{f}_{x3} \\ \bar{f}_{y3} \end{pmatrix} = \frac{1,2 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2,4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0002 \\ -0,00228 \end{pmatrix} \quad (14.49)$$



Per tant,

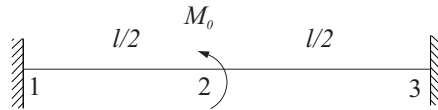
$$\begin{aligned}\bar{f}_{x1} &= 20.100 \text{ N} \\ \bar{f}_{x3} &= -20.100 \text{ N}\end{aligned}$$

és a dir, sobre la barra 2 actúa una compressió de 20.100 N.

Problema 14.7

Calculeu les reaccions als extrems de la barra de la figura 14.31.

Fig. 14.31

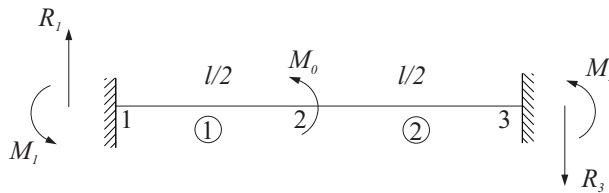


Solució:

Procediment: mètode matricial reduït

Numerem les barres i els nusos, i dibuixem les reaccions (fig. 14.32). Per simetria, el nus 2 no experimentarà cap desplaçament, però sí un gir. Així doncs, l'estructura té un sol grau de llibertat no prescrit: el gir del nus 2.

Fig. 14.32



L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra de longitud l , negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Així, la matriu de rigidesa reduïda de la barra 1 serà

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{l/2} 4$$



i la de la barra 2 serà igual que la de la 1

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{l/2} 4$$

Així, la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura serà

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l/2} 8 = \frac{16EI}{l}$$

i l'equació de rigidesa reduïda,

$$M_0 = \frac{16EI}{l} \theta_2$$

d'on

$$\theta_2 = \frac{M_0 l}{16EI}$$

Aplicant l'equació de rigidesa per a la barra 1, tindrem (fig. 14.33)

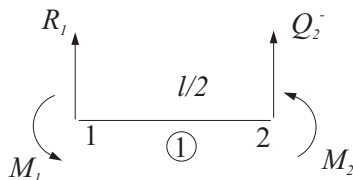


Fig. 14.33

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ M_1 \\ Q_2^- \\ M_2^- \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \frac{96}{l^2} & \frac{24}{l} & \frac{-96}{l^2} & \frac{24}{l} \\ \frac{24}{l} & 4 & \frac{-24}{l} & 2 \\ \frac{-96}{l^2} & \frac{-24}{l} & \frac{96}{l^2} & \frac{-24}{l} \\ \frac{24}{l} & 2 & \frac{-24}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_0 l}{16EI} \end{pmatrix}$$

d'on

$$R_1 = \frac{3M_0}{2l}$$

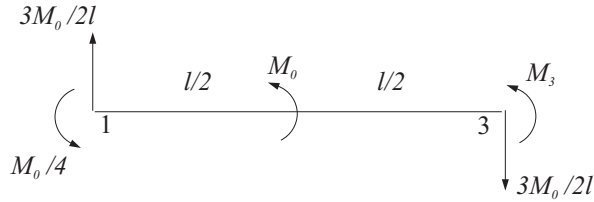
$$M_1 = \frac{M_0}{4}$$

Aplicant l'equació de rigidesa a la barra 2, o bé aplicant l'estàtica al conjunt de l'estructura, n'obtidrem les reaccions a l'extrem 3. Ho farem d'aquesta darrera manera. De la figura 14.34 es dedueix, de manera immediata,

$$M_3 = \frac{M_0}{4}$$

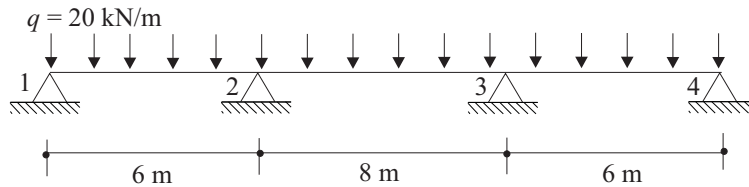


Fig. 14.34

**Problema 14.8**

Calculeu les reaccions i els girs en els suports de l'estructura de la figura (14.35). Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ i negligiu les deformacions per esforços normals i per cisallament.

Fig. 14.35



Solució:

Procediment: mètode matricial

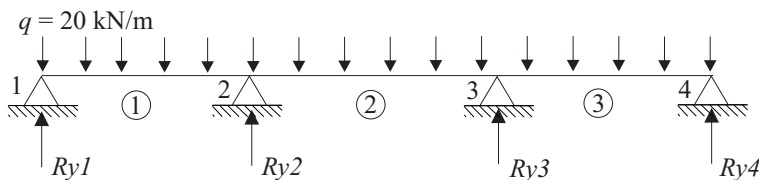
L'equació de rigidesa d'una barra en coordenades locals, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} f_{yi} \\ M_i \\ f_{yj} \\ M_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

on s'han suprimit, per comoditat, les barres superiors. f_{yi} , M_i , f_{yj} , M_j són les forces i els moments externs totals aplicats als punts i i j , respectivament, que seran, en aquest cas, les reaccions externes i les càrregues equivalents creades per les càrregues repartides.

En primer lloc, numerem els nusos i les barres (fig. 14.36). Substituint dades, la matriu de rigidesa per a la barra 1 és

Fig. 14.36





$$\mathbf{K}^{(1)} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 \\ -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix}$$

per a la barra 2,

$$\mathbf{K}^{(2)} = EI \begin{pmatrix} 0,023 & 0,093 & -0,023 & 0,093 \\ 0,093 & 0,5 & -0,093 & 0,25 \\ -0,023 & -0,093 & 0,023 & -0,093 \\ 0,093 & 0,25 & -0,093 & 0,5 \end{pmatrix}$$

per a la barra 3 serà igual que per a la 1.

Augmentant per a la barra 1, la seva equació de rigidesa serà

$$\begin{pmatrix} f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ f_{y3}^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ f_{y4}^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

per a la 2,

$$\begin{pmatrix} f_{y1}^{(2)} \\ M_1^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ f_{y4}^{(2)} \\ M_4^{(2)} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,023 & 0,093 & -0,023 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,5 & -0,093 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,023 & -0,093 & 0,023 & -0,093 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,25 & -0,093 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

i, per a la 3,

$$\begin{pmatrix} f_{y1}^{(3)} \\ M_1^{(3)} \\ f_{y2}^{(3)} \\ M_2^{(3)} \\ f_{y3}^{(3)} \\ M_3^{(3)} \\ f_{y4}^{(3)} \\ M_4^{(3)} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$



Així, l'equació de rigidesa de l'estructura serà, tenint en compte les càrregues repartides (v. problema 14.1),

$$\begin{pmatrix} R_{y1} - 60 \\ -60 \\ R_{y2} - 140 \\ -46,66 \\ R_{y3} - 140 \\ 46,66 \\ R_{y4} - 60 \\ 60 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,055 & -0,166 & 0,078 & -0,073 & -0,023 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,333 & -0,073 & 1,166 & -0,093 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,023 & -0,093 & 1,166 & 0,073 & -0,055 & 0,166 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,25 & 0,073 & 1,166 & -0,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (14.50)$$

i les condicions de contorn són

$$u_{y1} = u_{y2} = u_{y3} = u_{y4} = 0$$

Així, eliminant les files i columnes 1, 3, 5 i 7,

$$\begin{pmatrix} -60 \\ -46,66 \\ 46,66 \\ 60 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,666 & 0,333 & 0 & 0 \\ 0,333 & 1,166 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 1,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0,333 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

resolent,

$$\theta_1 = \frac{-78,97}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_2 = \frac{-22,22}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = \frac{22,22}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_4 = \frac{78,97}{EI} \text{ rad}$$

i, substituint aquests valors a 14.50,

$$\begin{pmatrix} R_{y1} - 60 \\ -60 \\ R_{y2} - 140 \\ -46,66 \\ R_{y3} - 140 \\ 46,66 \\ R_{y4} - 60 \\ 60 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,055 & -0,166 & 0,078 & -0,073 & -0,023 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,333 & -0,073 & 1,166 & -0,093 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,023 & -0,093 & 1,166 & 0,073 & -0,055 & 0,166 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,25 & 0,073 & 1,166 & -0,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -78,97/EI \\ 0 \\ -22,22/EI \\ 0 \\ 22,22/EI \\ 0 \\ 78,97/EI \end{pmatrix}$$



d'on obtenim

$$R_{y1} = 43,21 \text{ kN}$$

$$R_{y2} = 156,79 \text{ kN}$$

$$R_{y3} = 156,79 \text{ kN}$$

$$R_{y4} = 43,21 \text{ kN}$$

Procediment: mètode matricial reduït

Començarem buscant l'equació de rigidesa reduïda de l'estructura; la que s'obté de considerar solament els graus de llibertat no prescrits, que són els quatre girs dels nusos. La matriu reduïda serà, doncs, 4×4 .

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Considerant únicament els graus de llibertat no prescrits de l'estructura, la matriu de rigidesa reduïda en coordenades locals de la barra 1 serà, doncs,

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{6} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

on se n'han eliminat les barres superiors ja que els eixos locals coincideixen amb els globals. Per a la 2,

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{8} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

i, per a la 3,

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{EI}{6} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Sumant per als diferents graus de llibertat, obtenim la matriu de rigidesa reduïda

$$EI \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} + \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} + \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

L'equació de rigidesa reduïda de l'estructura serà, doncs, considerant les càrregues repartides,

$$\begin{pmatrix} -\frac{20 \cdot 6^2}{12} \\ \frac{20 \cdot 6^2}{12} - \frac{20 \cdot 8^2}{12} \\ \frac{20 \cdot 8^2}{12} - \frac{20 \cdot 6^2}{12} \\ \frac{20 \cdot 6^2}{12} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} + \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} + \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Resolent, obtenim els desplaçaments corresponents als graus de llibertat no prescrits

$$\theta_1 = \frac{-78,97}{EI} \text{ rad}$$

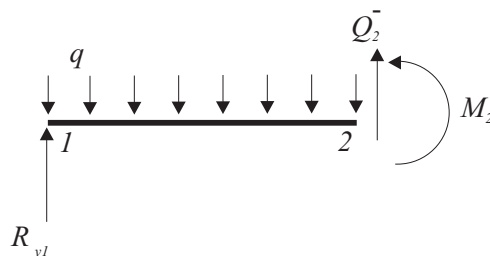
$$\theta_2 = \frac{-22,22}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = \frac{22,22}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_4 = \frac{78,97}{EI} \text{ rad}$$

Un cop tenim els girs en els quatre nusos, tornant a aplicar l'equació de rigidesa per a cada barra obtenim els esforços en els extrems. Per a la barra 1 (fig. 14.37), serà

Fig. 14.37





$$\begin{pmatrix} R_{y1} - 60 \\ -60 \\ Q_2^- - 60 \\ 60 + M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{78,97}{EI} \\ 0 \\ -\frac{22,22}{EI} \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} R_{y1} &= 43,13 \text{ kN} \\ Q_2^- &= 76,87 \text{ kN} \\ M_2 &= -101,18 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Per a la barra 2 (fig. 14.38),

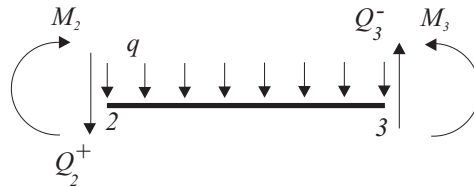


Fig. 14.38

$$\begin{pmatrix} -80 - Q_2^+ \\ -M_2 - 106,66 \\ -80 + Q_3^- \\ 106,66 + M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{8} \begin{pmatrix} \frac{12}{64} & \frac{6}{8} & -\frac{12}{64} & \frac{6}{8} \\ \frac{6}{8} & 4 & -\frac{6}{8} & 2 \\ -\frac{12}{64} & -\frac{6}{8} & \frac{12}{64} & -\frac{6}{8} \\ \frac{6}{8} & 2 & -\frac{6}{8} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{22,22}{EI} \\ 0 \\ \frac{22,22}{EI} \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} Q_2^+ &= -80 \text{ kN} \\ Q_3^- &= 80 \text{ kN} \end{aligned}$$

Aplicant l'equilibri al nus 2 (fig. 14.39), obtenim

$$R_{y2} = 156,87 \text{ kN}$$

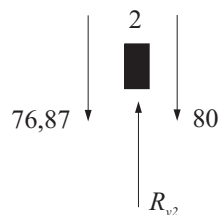


Fig. 14.39



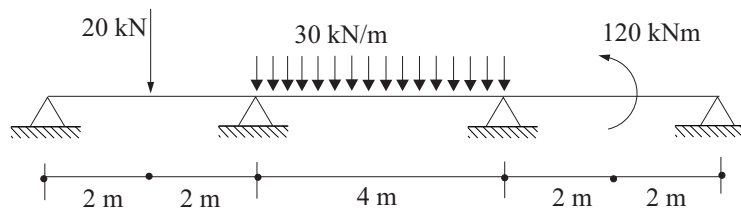
Per simetria, la situació a la barra 3 és igual que a la barra 1. Per tant,

$$\begin{aligned} R_{y3} &= R_{y2} = 156,87 \text{ kN} \\ R_{y4} &= R_{y1} = 43,13 \text{ kN} \end{aligned}$$

Problema 14.9

Calculeu els moments flectors en els quatre suports de la barra de la figura 14.40.

Fig. 14.40

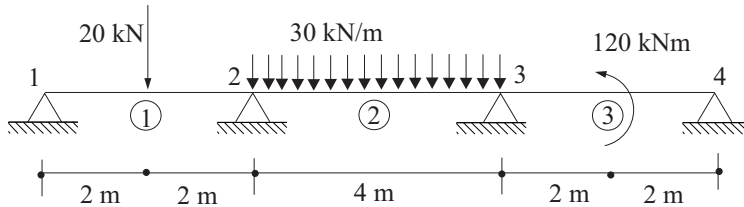


Solució:

Procediment: mètode matricial reduït

En primer lloc, numerem les barres i els nusos (fig. 14.41). L'estructura té quatre graus de llibertat no prescrits: els quatre girs dels nusos.

Fig. 14.41



L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Considerant únicament els graus de llibertat no prescrits, la matriu de rigidesa reduïda en coordenades locals de la barra 1 serà, doncs,



$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

per a la 2,

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

i, per a la 3,

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

Sumant per als diferents graus de llibertat, obtindrem la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

i l'equació de rigidesa reduïda, tenint en compte les càrregues equivalents (vegeu el problema 14.1),

$$\begin{pmatrix} \frac{-20 \cdot 4}{8} \\ \frac{20 \cdot 4}{8} - \frac{30 \cdot 4^2}{12} \\ \frac{30 \cdot 4^2}{12} - \frac{120}{4} \\ -\frac{120}{4} \end{pmatrix} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Simplificant,

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

d'on

$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = \frac{-20}{EI}$$

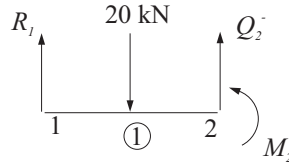


$$\theta_3 = \frac{20}{EI}$$

$$\theta_4 = \frac{-40}{EI}$$

Un cop tenim calculats els graus de llibertat no prescrits, apliquem l'equació de rigidesa completa en coordenades locals a cada una de les barres per determinar els esforços als seus extrems. Per a la barra 1 (fig. 14.42),

Fig. 14.42



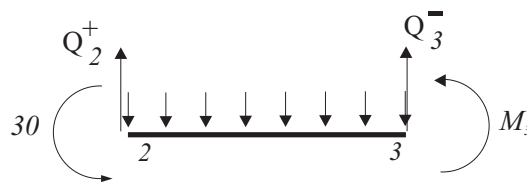
$$\begin{pmatrix} R_1 - 10 \\ \frac{-20 \cdot 4}{8} \\ Q_2 - 10 \\ M_2 + \frac{20 \cdot 4}{8} \end{pmatrix} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} \frac{12}{16} & \frac{6}{4} & \frac{-12}{16} & \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} & 4 & \frac{-6}{4} & 2 \\ \frac{-12}{16} & \frac{-6}{4} & \frac{12}{16} & \frac{-6}{4} \\ \frac{6}{4} & 2 & \frac{-6}{4} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-20}{EI} \end{pmatrix}$$

d'on

$$M_2 = -30 \text{ kNm}$$

Per a la barra 2 (fig. 14.43),

Fig. 14.43



$$\begin{pmatrix} Q_2^+ - 60 \\ 30 - 40 \\ Q_3^- - 60 \\ M_3 + 40 \end{pmatrix} = \frac{EI}{4} \begin{pmatrix} \frac{12}{16} & \frac{6}{4} & \frac{-12}{16} & \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} & 4 & \frac{-6}{4} & 2 \\ \frac{-12}{16} & \frac{-6}{4} & \frac{12}{16} & \frac{-6}{4} \\ \frac{6}{4} & 2 & \frac{-6}{4} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-20}{EI} \\ 0 \\ \frac{20}{EI} \end{pmatrix}$$

d'on

$$M_3 = -30 \text{ kNm}$$

És clar que $M_4 = 0$, com es pot comprovar aplicant l'equació de rigidesa a la barra 3.

Problema 14.10

Determineu els graus de llibertat no prescrits de l'estructura de la figura 14.44 i escriviu la matriu de rigidesa reduïda corresponent a aquests graus de llibertat. Negligiu la deformació per esforços normals i per cisallament, i suposeu que totes les barres tenen el mateix valor de EI .

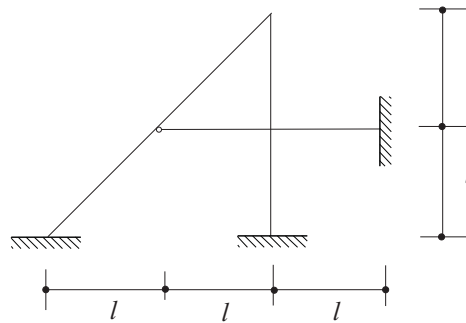


Fig. 14.44

Solució:

Procediment: mètode matricial reduït

Primerament, numerem els nusos i les barres (fig. 14.45). Com que negligim la deformació per esforços normals, la component del desplaçament del nus 2 en la direcció de la barra 1 ha de ser zero, però, a la vegada, la component horitzontal també és zero. La conclusió és que les dues components del desplaçament són zero, Ãs a dir, el nus 2 només pot girar.

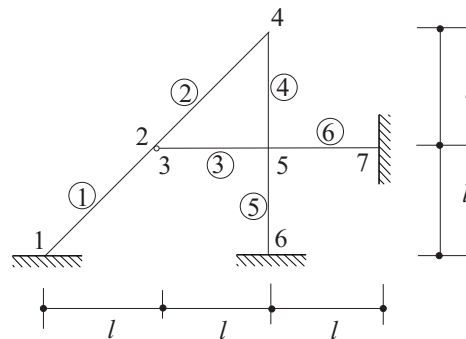


Fig. 14.45

El nus 3 només pot girar, ja que el seu desplaçament ha de ser el mateix que el del nus 2, i el d'aquest ja hem vist que és zero. El gir del nus 3 és, en principi, diferent del gir del 2. El nus 4 només pot girar, ja que el seu desplaçament vertical ha de ser zero i la



component en la direcció de la barra 2, també. El nus 5 no es pot moure ni verticalment ni horitzontalment; només pot girar. Els nusos 1, 6 i 7 no tenen cap moviment ja que corresponen a encastaments. Així doncs, hi ha quatre graus de llibertat no prescrits: θ_2 , θ_3 , θ_4 , θ_5

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Les matrius de rigidesa reduïdes seran, doncs,

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{l\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 4 \end{pmatrix} \theta_2$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{l\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \theta_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \theta_4 & \theta_5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(5)} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \theta_5 \\ 4 \end{pmatrix} \theta_5$$

Sumant per als diferents graus de llibertat, obtenim la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Problema 14.11

Calculeu els moviments de l'estructura i les reaccions externes (fig. 14.46). Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$, $q = 30 \text{ kN/m}$, $l = 10 \text{ m}$, i considereu negligibles la deformació per esforços normals i per cisallament.

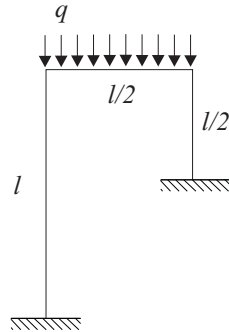


Fig. 14.46

Solució:

Procediment: mètode matricial reduït

En primer lloc, numerem els nusos i les barres, i indiquem els eixos locals i globals (fig. 14.47).

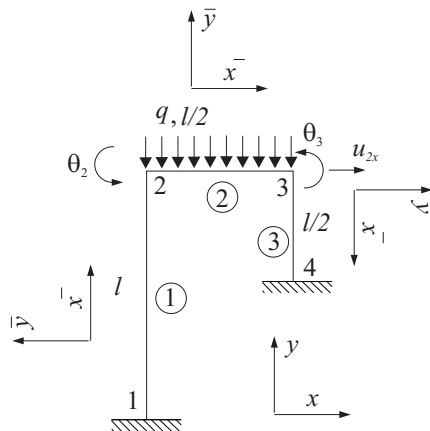


Fig. 14.47

Si negligim les deformacions per esforços normals i per cisallament, els tres únics moviments possibles en l'estructura són els girs dels nusos 2 i 3, i el desplaçament horitzontal del nus 2 (que ha de ser igual que el del nus 3); així doncs, l'estructura té tres graus de llibertat no prescrits, que estan també dibuixats a la figura 14.47.

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34



$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & \frac{-6}{l} & 2 \\ \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Considerant únicament els graus de llibertat no prescrits de l'estructura, tindrem, per a la barra 1,

$$\bar{\mathbf{K}}^{(1)} = \frac{10^5}{10} \begin{pmatrix} \bar{u}_{y2} & \theta_2 \\ 0,12 & -0,6 \\ -0,6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Tenint en compte que $\bar{u}_{y2} = -u_{x2}$, tindrem, per a la matriu reduïda en coordenades globals,

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{10^5}{10} \begin{pmatrix} u_{x2} & \theta_2 \\ 0,12 & 0,6 \\ 0,6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} u_{x2} & \theta_2 \\ 0,06 & 0,3 \\ 0,3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Per a la barra 2,

$$\bar{\mathbf{K}}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

i, per a la 3, escrivint u_{x2} en comptes de \bar{u}_{y3} ja que és el mateix desplaçament,

$$\bar{\mathbf{K}}^{(3)} = \mathbf{K}^{(3)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} u_{x2} & \theta_3 \\ 0,48 & 1,2 \\ 1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Sumant per als diferents graus de llibertat, obtenim la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura

$$\mathbf{K} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} u_{x2} & \theta_2 & \theta_3 \\ 0,54 & 0,3 & 1,2 \\ 0,3 & 6 & 2 \\ 1,2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

L'equació de rigidesa reduïda serà, tenint en compte les càrregues equivalents (v. problema 14.1),

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -62,5 \\ 62,5 \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 0,54 & 0,3 & 1,2 \\ 0,3 & 6 & 2 \\ 1,2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$



i, resolent, obtenim

$$\begin{aligned}u_{x2} &= -130,2 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ \theta_2 &= -71,02 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \\ \theta_3 &= 76,34 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\end{aligned}$$

Un cop trobats els desplaçaments corresponents als graus de llibertat no prescrits, analitzem les barres per separat per obtenir-ne les reaccions externes.

Per a la barra 1 (fig. 14.48), l'equació de rigidesa en coordenades locals és, substituint els resultats obtinguts,

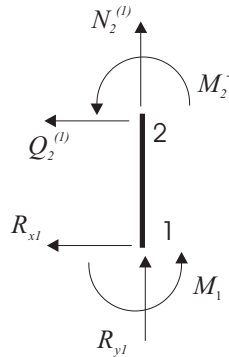


Fig. 14.48

$$\begin{pmatrix} R_{x1} \\ M_1 \\ Q_2^{(1)} \\ \frac{N_2}{M_2} \end{pmatrix} = \frac{10^5}{10} \begin{pmatrix} 0,12 & 0,6 & -0,12 & 0,6 \\ 0,6 & 4 & -0,6 & 2 \\ -0,12 & -0,6 & 0,12 & -0,6 \\ 0,6 & 2 & -0,6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 130,2 \cdot 10^{-5} \\ -71,02 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

$$\begin{aligned}R_{x1} &= -5,82 \text{ kN} \\ M_1 &= -22 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Per a la barra 3 (fig. 14.49), l'equació de rigidesa en coordenades locals és

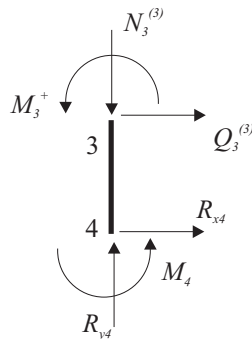


Fig. 14.49



$$\begin{pmatrix} Q_3^{(3)} \\ M_3^+ \\ R_{x4} \\ M_4 \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 0,48 & 1,2 & -0,48 & 1,2 \\ 1,2 & 4 & -1,2 & 2 \\ -0,48 & -1,2 & 0,48 & -1,2 \\ 1,2 & 2 & -1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -130,2 \cdot 10^{-5} \\ 76,34 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

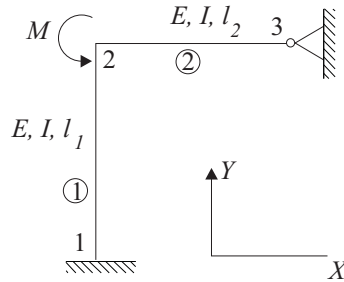
$$\begin{aligned} R_{x4} &= -5,82 \text{ kN} \\ M_4 &= -0,712 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Problema 14.12

Per l'estructura de la figura 14.50, $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $I = 10^{-8} \text{ m}^4$, $M = 1.000 \text{ Nm}$, $l_1 = l_2 = 5 \text{ m}$. Calculeu els desplaçaments, els girs, les reaccions externes i els esforços interns a les barres en els casos següents:

- Considerem negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament (però no a l'esforç normal), suposant $A = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.
- Considerem negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament i la deguda a l'esforç normal.

Fig. 14.50



Solució:

- Procediment: mètode matricial.* La matriu de rigidesa en coordenades locals d'una barra, considerant negligibles les deformacions per cisallament i fent-hi intervenir els esforços i les deformacions normals, és 14.31

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{pmatrix} \quad \text{sim}$$



i el pas a coordenades globals s'efectua segons la transformació

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^t \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}$$

on $\mathbf{T}^{(e)}$ és la matriu 14.33

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a l'element 1, $c = 0$ i $s = 1$. Substituint dades s'obté

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 1680 & 504 & 0 & 840 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 \end{pmatrix}$$

Per a l'element 2, $c = 1$ i $s = 0$; per tant,

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 201,6 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ 0 & 504 & 1680 & 0 & -504 & 840 \\ -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -201,6 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 504 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix}$$

Les equacions de rigidesa en coordenades globals seran, doncs, per a la barra 1,

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 1680 & 504 & 0 & 840 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ \theta_1^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

i, per a la barra 2,

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 201,6 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ 0 & 504 & 1680 & 0 & -504 & 840 \\ -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -201,6 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 504 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \end{pmatrix}$$



Per al procés d'augmentar, observem que el vector de desplaçaments generalitzats de l'estructura té nou components: tres al nus 1 (dos desplaçaments i un gir), tres al nus 2 (dos desplaçaments i un gir) i tres al nus 3 (dos desplaçaments i un gir).

Augmentant, obtindrem, per a la barra 1,

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 & 0 & 0 & 0 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Les components que hem afegit són les que ocupen les posicions 7, 8 i 9 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració.

I, per la 2,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 201,6 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 1.680 & 0 & -504 & 840 \\ 0 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -201,6 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Les components que hem afegit són les que ocupen les posicions 1, 2 i 3 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració.

Sumant i imposant l'equilibri als nusos, obtenim finalment l'equació de rigidesa de l'estructura en coordenades globals

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 & 0 & 0 & 0 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 504 & 0 & -202 & 504 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 504 & 3.360 & 0 & -504 & 840 \\ 0 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -201,6 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Imposem ara les condicions de contorn, que són

$$u_{x1} = u_{y1} = \theta_1 = u_{x3} = u_{y3} = 0$$

per als desplaçaments, i

$$\begin{aligned} f_{x2} &= f_{y2} = M_3 = 0 \\ M_2 &= 1.000 \end{aligned}$$

per a les càrregues externes.

Eliminant les files i columnes corresponents als desplaçaments nuls, és a dir, les 1, 2, 3, 7 i 8, obtenim

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33.600.201,6 & 0 & 504 & 0 \\ 0 & 33.600.201,6 & 504 & 504 \\ 504 & 504 & 3360 & 840 \\ 0 & 504 & 840 & 1680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema d'equacions, obtenim

$$\begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-06} \\ -2,55 \cdot 10^{-06} \\ 0,34 \\ -0,17 \end{pmatrix}$$

Substituint a l'equació de rigidesa completa de l'estructura els valors trobats, obtenim el vector de forces generalitzades

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -171,42 \\ 85,71 \\ 285,71 \\ -0,0001 \\ 1,42 \cdot 10^{-14} \\ 1.000 \\ 171,42 \\ -85,71 \\ -5,68 \cdot 10^{-14} \end{pmatrix}$$

Observem que les forces externes aplicades al nus 2 i el moment aplicat al nus 3, que haurien de ser zero, donen una quantitat molt petita; això és degut al truncament de decimals en el càlcul. D'altra banda, comprovem que es manté l'equilibri de l'estructura tant pel que fa a forces com pel que fa a moments.

- b) *Procediment: mètode matricial reduït.* Si negligim les deformacions per normals (es pot veure a l'apartat a que els valors dels desplaçaments del nus 2 són molt petits), el nus 2 no es mou ni horitzontalment ni verticalment (seria necessari un canvi de longitud en alguna de les dues barres); tenim, doncs, dos graus de llibertat no prescrits: el gir del nus 2 i el del nus 3.

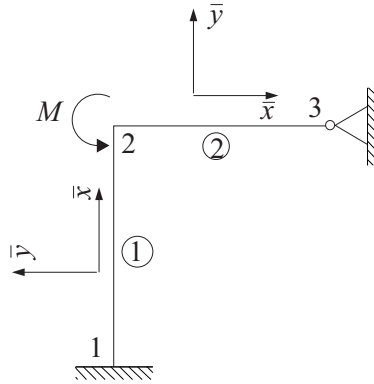


L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Així doncs, considerant únicament els graus de llibertat no prescrits, tindrem, per la matriu de rigidesa reduïda en coordenades locals de la barra 1 (només hi pot haver gir en el nus 2) (fig. 14.51),

Fig. 14.51



$$\bar{\mathbf{K}}^{(1)} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 4 \end{pmatrix} \theta_2 = \mathbf{K}^{(1)} \quad (14.51)$$

Com que el gir és l'únic grau de llibertat existent, la matriu de rigidesa en coordenades locals i globals coincideix.

Per a la barra 2,

$$\bar{\mathbf{K}}^{(2)} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{(2)} \quad (14.52)$$

i, sumant per a cada un dels graus de llibertat,

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Així, l'equació de rigidesa reduïda de l'estructura serà, substituint dades,

$$\begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{5} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

i, resolent

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 0,34 \text{ rad} \\ \theta_3 &= -0,17 \text{ rad} \end{aligned}$$

Un cop trobats els girs, vegem ara el desglossament de cada barra per trobar els esforços als extrems.

L'equació de rigidesa de la barra 1 és (fig. 14.52)

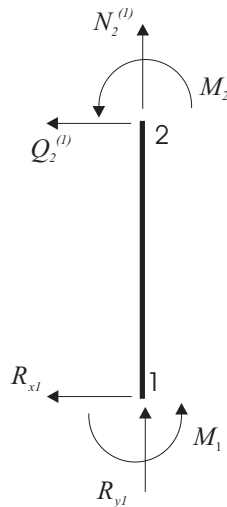


Fig. 14.52

$$\begin{pmatrix} R_{x1} \\ M_1 \\ Q_2^{(1)} \\ M_2^- \end{pmatrix} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{5} \begin{pmatrix} 0,48 & 1,2 & -0,48 & 1,2 \\ 1,2 & 4 & -1,2 & 2 \\ -0,48 & -1,2 & 0,48 & -1,2 \\ 1,2 & 2 & -1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,34 \end{pmatrix}$$

d'on

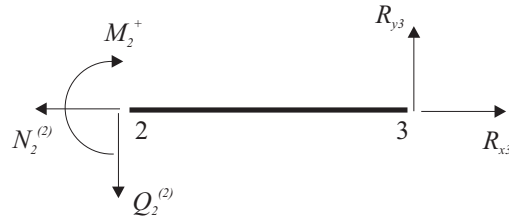
$$\begin{aligned} R_{x1} &= 171,36 \text{ kN} \\ M_1 &= 285,6 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Per a la barra 2 (fig. 14.53),

$$\begin{pmatrix} -Q_2^{(2)} \\ -M_2^+ \\ R_{y3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{5} \begin{pmatrix} 0,48 & 1,2 & -0,48 & 1,2 \\ 1,2 & 4 & -1,2 & 2 \\ -0,48 & -1,2 & 0,48 & -1,2 \\ 1,2 & 2 & -1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0,34 \\ 0 \\ -0,17 \end{pmatrix}$$



Fig. 14.53



d'on

$$R_{y3} = -85,6 \text{ kN}$$

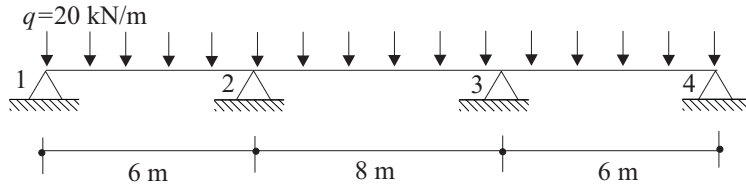
i, per tant, aplicant l'equilibri a tota l'estructura,

$$R_{y1} = 85,6 \text{ kN}$$

Problema 14.13

Resoleu l'estructura de la figura 14.54, on el suport 2 experimenta un descens de $72/EI$. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ i negligiu les deformacions per esforços normals i per cisallament.

Fig. 14.54



Solució:

Procediment: mètode matricial

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} f_{yi} \\ M_i \\ f_{yj} \\ M_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

on s'han suprimit, per comoditat, les barres superiors. f_{yi} , M_i , f_{yj} , M_j són les forces i els moments externs totals aplicats als punts i i j , respectivament, que seran, en aquest cas, les reaccions externes i les càrregues equivalents creades per les càrregues repartides.



En primer lloc, numerem els nusos i les barres (fig. 14.55). Substituint dades, la matriu de rigidesa per a la barra 1 és

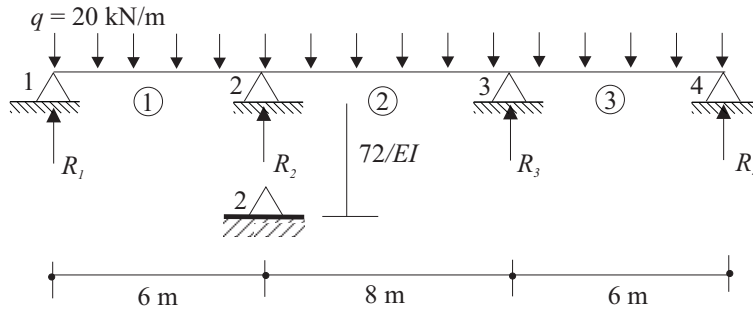


Fig. 14.55

$$\mathbf{K}^{(1)} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 \\ -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix}$$

per a la barra 2,

$$\mathbf{K}^{(2)} = EI \begin{pmatrix} 0,023 & 0,093 & -0,023 & 0,093 \\ 0,093 & 0,5 & -0,093 & 0,25 \\ -0,023 & -0,093 & 0,023 & -0,093 \\ 0,093 & 0,25 & -0,093 & 0,5 \end{pmatrix}$$

i, per a la barra 3, serà igual que per a la 1. Augmentant per a la barra 1, la seva equació de rigidesa serà

$$\begin{pmatrix} f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ f_{y3}^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ f_{y4}^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

per a la 2,

$$\begin{pmatrix} f_{y1}^{(2)} \\ M_1^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ f_{y4}^{(2)} \\ M_4^{(2)} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,023 & 0,093 & -0,023 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,5 & -0,093 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,023 & -0,093 & 0,023 & -0,093 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,25 & -0,093 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$



i, per a la 3,

$$\begin{pmatrix} f_{y1}^{(3)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{y2}^{(3)} \\ M_2^{(3)} \\ f_{y3}^{(3)} \\ M_3^{(3)} \\ f_{y4}^{(3)} \\ M_4^{(3)} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Així, l'equació de rigidesa de l'estructura serà, tenint en compte les càrregues repartides (v. problema 14.1),

$$\begin{pmatrix} R_1 - 60 \\ -60 \\ R_2 - 140 \\ -46,66 \\ R_3 - 140 \\ 46,66 \\ R_4 - 60 \\ 60 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,055 & -0,166 & 0,078 & -0,073 & -0,023 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,333 & -0,073 & 1,166 & -0,093 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,023 & -0,093 & 1,166 & 0,073 & -0,055 & 0,166 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,25 & 0,073 & 1,166 & -0,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (14.53)$$

i les condicions de contorn són

$$u_{y1} = u_{y3} = u_{y4} = 0 \quad u_{y2} = -72/EI$$

La darrera condició prescriu un grau de llibertat a un valor diferent de zero; la tractarem, doncs, segons el mètode de multiplicadors de Lagrange descrit a 14.2 i que consisteix a considerar aquest grau de llibertat com alliberat i, un cop obtinguda l'equació de rigidesa, imposar l'equació de lligadura que en fixa el valor.

Així doncs, considerem com a graus de llibertat no prescrits, θ_1 , u_{y2} , θ_2 , θ_3 i θ_4 . Eliminant les files i columnes 1, 5 i 7 (les corresponents als graus de llibertat prescrits),

$$\begin{pmatrix} -60 \\ -140 \\ -46,66 \\ 46,66 \\ 60 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 \\ -0,166 & 0,078 & -0,073 & 0,093 & 0 \\ 0,333 & -0,073 & 1,166 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,093 & 0,25 & 1,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0,033 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (14.54)$$

Observem que l'alliberament del grau de llibertat u_{y2} implica no tenir en compte R_2 , tal com hem fet, ja que és aquesta reacció la que, físicament, imposa la lligadura.

L'equació 14.54 s'ha de modificar per tenir en compte l'equació de lligadura $u_{y2} = -72/EI$. El sistema augmentat per multiplicadors de l'estructura serà



$$\begin{pmatrix} -60 \\ -140 \\ -46,66 \\ 46,66 \\ 60 \\ -72 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 & 0 \\ -0,166 & 0,078 & -0,073 & 0,093 & 0 & 1 \\ 0,333 & -0,073 & 1,166 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,093 & 0,25 & 1,166 & 0,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,033 & 0,666 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (14.55)$$

i, resolent,

$$\theta_1 = -96,41/EI \text{ rad} = -96,41 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_2 = -23,24/EI \text{ rad} = -23,24 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 29,18/EI \text{ rad} = 29,18 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 75,49/EI \text{ rad} = 75,49 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

i, substituint aquests valors a 14.53,

$$\begin{pmatrix} R_1 - 60 \\ -60 \\ R_2 - 140 \\ -46,66 \\ R_3 - 140 \\ 46,66 \\ R_4 - 60 \\ 60 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,055 & 0,166 & -0,055 & 0,166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,666 & -0,166 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,055 & -0,166 & 0,078 & -0,073 & -0,023 & 0,093 & 0 & 0 \\ 0,166 & 0,333 & -0,073 & 1,166 & -0,093 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,023 & -0,093 & 1,166 & 0,073 & -0,055 & 0,166 \\ 0 & 0 & 0,093 & 0,25 & 0,073 & 1,166 & -0,166 & 0,333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,055 & -0,166 & 0,055 & -0,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,333 & -0,166 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -96,41/EI \\ -72/EI \\ -23,24/EI \\ 0 \\ 29,18/EI \\ 0 \\ 75,49/EI \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

$$R_1 = 44,1 \text{ kN}$$

$$R_2 = 154,79 \text{ kN}$$

$$R_3 = 158,47 \text{ kN}$$

$$R_4 = 42,63 \text{ kN}$$

La diferència respecte als valors obtinguts mitjançant el procediment de Navier-Bresse és deguda a arrodoniments en els càlculs.

Procediment: mètode matricial reduït

L'estructura és la mateixa que la de l'exercici anterior però hi ha un grau de llibertat, el desplaçament del nus 2, prescrit en un valor diferent de zero. L'anàlisi, en aquests casos, seguint el mètode dels multiplicadors de Lagrange descrit a 14.2, consisteix a considerar aquest grau de llibertat prescrit com a alliberat i, un cop obtinguda l'equació de rigidesa, imposar l'equació de lligadura que en fixa el valor.

Així doncs, considerem cinc graus de llibertat no prescrits: θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 i u_{y2} . Per tant, les matrius de rigidesa reduïdes de les barres seran

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{6} \begin{pmatrix} \theta_1 & u_{y2} & \theta_2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 12/36 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{8} \begin{pmatrix} \frac{12}{8^2} & \frac{6}{8} & \frac{6}{8} \\ \frac{6}{8} & 4 & 2 \\ \frac{6}{8} & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{EI}{6} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

Sumant per als diferents graus de llibertat,

$$\mathbf{K} = EI \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} + \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & 0 & \frac{-1}{6} + \frac{6}{8^2} \\ 0 & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} + \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & \frac{6}{8^2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} + \frac{6}{8^2} & \frac{6}{8^2} & 0 & \frac{12}{6^3} + \frac{12}{8^3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ u_{y2} \end{matrix}$$

Per tant, l'equació de rigidesa reduïda serà

$$\begin{pmatrix} -60 \\ -46,66 \\ 46,66 \\ 60 \\ -140 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,666 & 0,333 & 0 & 0 & -0,166 \\ 0,333 & 1,166 & 0,25 & 0 & -0,072 \\ 0 & 0,25 & 1,166 & 0,333 & 0,093 \\ 0 & 0 & 0,333 & 0,666 & 0 \\ -0,166 & -0,072 & 0,093 & 0 & 0,079 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ u_{y2} \end{pmatrix}$$

Aquesta equació s'ha de modificar per tenir en compte l'equació de lligadura $u_{y2} = -72/EI$. Aplicant el mètode dels multiplicadors de Lagrange, tindrem, per al sistema augmentat per multiplicadors de l'estructura,

$$\begin{pmatrix} -60 \\ -46,66 \\ 46,66 \\ 60 \\ -140 \\ -72 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0,666 & 0,333 & 0 & 0 & -0,166 & 0 \\ 0,333 & 1,166 & 0,25 & 0 & -0,072 & 0 \\ 0 & 0,25 & 1,166 & 0,333 & 0,093 & 0 \\ 0 & 0 & 0,333 & 0,666 & 0 & 0 \\ -0,166 & -0,072 & 0,093 & 0 & 0,079 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ u_{y2} \\ \lambda \end{pmatrix}$$



i, resolent el sistema, obtenim

$$\theta_1 = -96/EI \text{ rad} = -0,00096 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = -23/EI \text{ rad} = -0,00023 \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 29/EI \text{ rad} = 0,00029 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 75/EI \text{ rad} = 0,00075 \text{ rad}$$

que coincideix, aproximadament, amb els valors obtinguts pels altres procediments.

Un cop tenim els girs en els quatre nusos, tornant a aplicar l'equació de rigidesa per a cada barra, obtenim els esforços en els extrems. Per a la barra 1 (fig. 14.56), serà

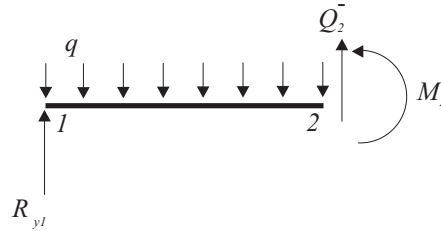


Fig. 14.56

$$\begin{pmatrix} R_{y1} - 60 \\ -60 \\ Q_2^- - 60 \\ 60 + M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 4 & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-96}{EI} \\ \frac{-72}{EI} \\ \frac{-23}{EI} \end{pmatrix}$$

d'on

$$R_{y1} = 44,16 \text{ kN}$$

$$Q_2^- = 75,83 \text{ kN}$$

Per a la barra 2 (fig. 14.57),

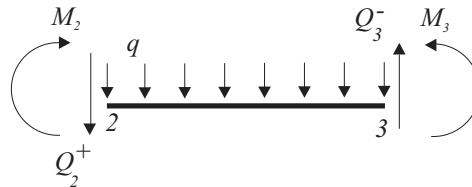


Fig. 14.57

$$\begin{pmatrix} -80 - Q_2^+ \\ -M_2 - 106,66 \\ -80 + Q_3^- \\ 106,66 + M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{8} \begin{pmatrix} \frac{12}{64} & \frac{6}{8} & -\frac{12}{64} & \frac{6}{8} \\ \frac{6}{8} & 4 & -\frac{6}{8} & 2 \\ -\frac{12}{64} & -\frac{6}{8} & \frac{12}{64} & -\frac{6}{8} \\ \frac{6}{8} & 2 & -\frac{6}{8} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-72}{EI} \\ \frac{-23}{EI} \\ 0 \\ \frac{29}{EI} \end{pmatrix}$$



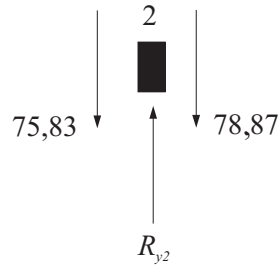
d'on

$$\begin{aligned} Q_2^+ &= -78,87 \text{ kN} \\ Q_3^- &= 81,12 \text{ kN} \end{aligned}$$

Aplicant l'equilibri al nus 2 (fig. 14.58), obtenim

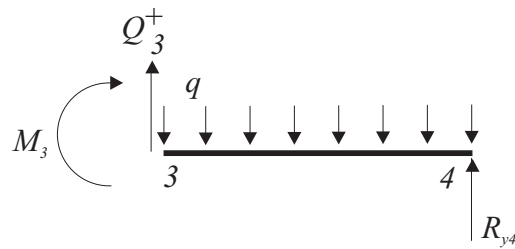
$$R_{y2} = 154,7 \text{ kN}$$

Fig. 14.58



Per a la barra 3 (fig. 14.59),

Fig. 14.59



$$\begin{pmatrix} -60 + Q_3^+ \\ -M_3 - 60 \\ -60 + R_{y4} \\ 60 \end{pmatrix} = \frac{EI}{6} \begin{pmatrix} \frac{12}{36} & 1 & \frac{-12}{36} & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ \frac{-12}{36} & -1 & \frac{12}{36} & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{29}{EI} \\ 0 \\ \frac{75}{EI} \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} Q_3^+ &= 77,33 \text{ kN} \\ R_{y4} &= 42,66 \text{ kN} \end{aligned}$$

Aplicant l'equilibri al nus 3 (fig. 14.60), obtenim

$$R_{y3} = 158,45 \text{ kN}$$

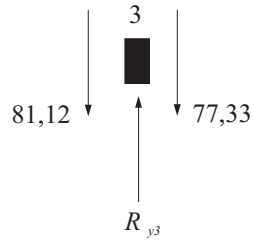


Fig. 14.60

Problema 14.14

Calculeu les reaccions i els moviments dels punts 1, 2, 3 i 4 del pòrtic de la figura 14.61, negligint les deformacions per esforços normals i per cisallament. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$.

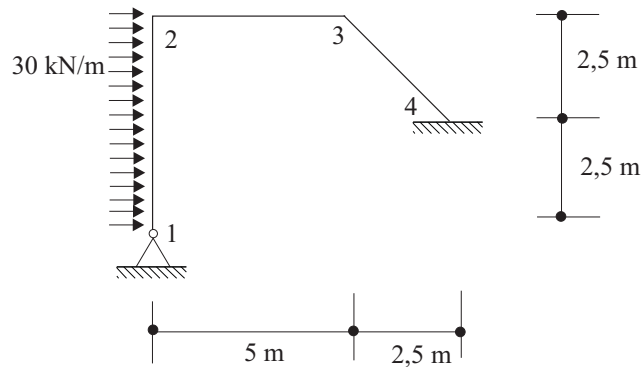


Fig. 14.61

Solució:

Procediment: mètode matricial reduït

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

i la matriu de transformació $\mathbf{T}^{(e)}$ per passar a coordenades globals, per 14.37

$$\begin{pmatrix} -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

essent la matriu de rigidesa en coordenades globals

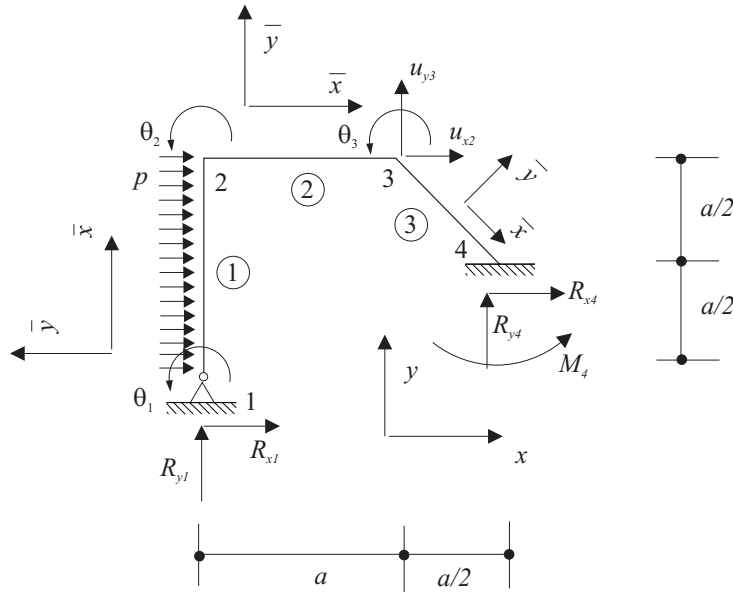
$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^t \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \quad (14.56)$$

L'estructura té tres graus de llibertat no prescrits (fig. 14.62): θ_1 , θ_2 i θ_3 , i dos graus de llibertat, u_{x2} i u_{y3} , subjectes a la condició de lligadura donada pel fet que la barra 3 no es pot ni allargar ni escurçar.

El fet que la barra 2 no experimenti deformacions per esforços normals ens permet dir que el desplaçament horitzontal del nus 3 és el mateix que el del nus 2, i el fet que a la barra 1 li passi el mateix ens permet dir que el desplaçament vertical del nus 2 és zero.

Seguint el procediment dels multiplicadors de Lagrange descrit a 14.2, obtenim l'equació de rigidesa de l'estructura sense lligadura, és a dir, prenem com a graus de llibertat no prescrits θ_1 , θ_2 , θ_3 , u_{x2} i u_{y3} , i a continuació, formem i resollem el sistema augmentat per multiplicadors de Lagrange.

Fig. 14.62



La matriu reduïda de la barra 1 en coordenades globals, tenint en compte que $\bar{u}_{y2} = -u_{x2}$, serà

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} \theta_1 & u_{x2} & \theta_2 \\ 4 & 1,2 & 2 \\ 1,2 & 0,48 & 1,2 \\ 2 & 1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_{x2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Per a la barra 2,

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} \theta_2 & u_{y3} & \theta_3 \\ 4 & -1,2 & 2 \\ -1,2 & 0,48 & -1,2 \\ 2 & -1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$



Per a la barra 3, la matriu reduïda en coordenades locals serà

$$\bar{\mathbf{K}}^{(3)} = \frac{10^5}{5/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{12}{25/2} & \frac{6}{5/\sqrt{2}} \\ \frac{6}{5/\sqrt{2}} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

que es pot escriure com

$$\bar{\mathbf{K}}^{(3)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} \bar{u}_{y3} & \theta_3 \\ 1,35 & 2,4 \\ 2,4 & 5,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Aplicant 14.56 i, tenint en compte que $\alpha = -45$, $s = -\sqrt{2}/2$ i $c = \sqrt{2}/2$, tindrem per a la matriu reduïda de la barra 3 en coordenades globals

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 1,35 & 2,4 \\ 2,4 & 5,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} u_{x2} & u_{y3} & \theta_3 \\ 0,66 & 0,66 & 1,68 \\ 0,66 & 0,66 & 1,68 \\ 1,68 & 1,68 & 5,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Tinguem en compte que aquesta equació no contempla la lligadura que la deformació per esforços normals és zero, ja que prové de l'equació de rigidesa en coordenades locals 14.34 i en ella no apareixen aquestes deformacions. Com hem dit, l'equació de lligadura s'incorporarà al final del procediment. Sumant per als diferents graus de llibertat, obtindrem la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura

$$\mathbf{K} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} \theta_1 & u_{x2} & \theta_2 & u_{y3} & \theta_3 \\ 4 & 1,2 & 2 & 0 & 0 \\ 1,2 & 1,14 & 1,2 & 0,66 & 1,68 \\ 2 & 1,2 & 8 & -1,2 & 2 \\ 0 & 0,66 & -1,2 & 1,14 & 0,48 \\ 0 & 1,68 & 2 & 0,48 & 9,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_{x2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Ara hem d'imposar l'equació de lligadura de la barra 3, que s'obté del fet que negligim les deformacions per esforços normals, és a dir, que la barra no varia de longitud (per a les barres 1 i 2, ja ho hem tingut en compte). Aquesta condició la podem expressar igualant les projeccions dels desplaçaments en la direcció de la barra en els dos extrems, és a dir,

$$u_{x2} \cos 45 = u_{y3} \sin 45$$



o bé

$$u_{x2} - u_{y3} = 0$$

Aplicant el procediment dels multiplicadors de Lagrange, i tenint en compte les càrregues repartides (v. problema 14.1), obtenim el sistema augmentat per multiplicadors de l'estructura

$$\begin{pmatrix} -62,5 \\ 75 \\ 62,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1,2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2 & 1,14 & 1,2 & 0,66 & 1,68 & 1 \\ 2 & 1,2 & 8 & -1,2 & 2 & 0 \\ 0 & 0,66 & -1,2 & 1,14 & 0,48 & -1 \\ 0 & 1,68 & 2 & 0,48 & 9,65 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_{x2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

d'on, resolent,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -0,00193 \text{ rad} \\ u_{x2} &= 0,00209 \text{ m} \\ \theta_2 &= 0,00104 \text{ rad} \\ u_{y3} &= 0,00209 \text{ m} \\ \theta_3 &= -0,00068 \text{ rad} \end{aligned}$$

Un cop obtinguts els desplaçaments generalitzats corresponents als graus de llibertat no prescrits, el pas següent és obtenir les reaccions externes i els esforços als extrems de les barres. Per fer-ho, tenim en compte l'equació de rigidesa en coordenades locals per a cada una d'elles.

Per a la barra 1, tenint en compte les càrregues equivalents, serà

$$\begin{pmatrix} -R_{x1} - 75 \\ -62,5 \\ \bar{f}_{y1}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 0,48 & 1,2 & -0,48 & 1,2 \\ 1,2 & 4 & -1,2 & 2 \\ -0,48 & -1,2 & 0,48 & -1,2 \\ 1,2 & 2 & -1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0,00193 \\ -0,00209 \\ 0,00104 \end{pmatrix}$$

d'on

$$R_{x1} = -73,704 \text{ kN}$$

Per a la barra 3, tenint en compte que $\bar{u}_{y3} = (0,00209^2 + 0,00209^2)^{0,5}$

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{y3}^{(3)} \\ M_3^{(3)} \\ \bar{f}_{y4}^{(3)} \\ M_4 \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 1,35 & 2,4 & -1,35 & 2,4 \\ 2,4 & 5,65 & -2,4 & 2,82 \\ -1,35 & -2,4 & 1,35 & -2,4 \\ 2,4 & 2,82 & -2,4 & 5,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,00295 \\ -0,00068 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on

$$M_4 = 103,24 \text{ kNm}$$

Aplicant l'estàtica a l'estructura, obtenim la resta de reaccions

$$\begin{aligned} R_{x4} &= -76,3 \text{ kN} \\ R_{y4} &= 10,8 \text{ kN} \\ R_{y1} &= -10,8 \text{ kN} \end{aligned}$$

La diferència en els resultats, respecte del procediment de Navier-Bresse, és deguda al truncament de decimals en el càlcul.

Problema 14.15

Resoleu l'estructura de la figura 14.63 negligint les deformacions per esforços normals i per cisallament. Preneu $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ a totes les barres.

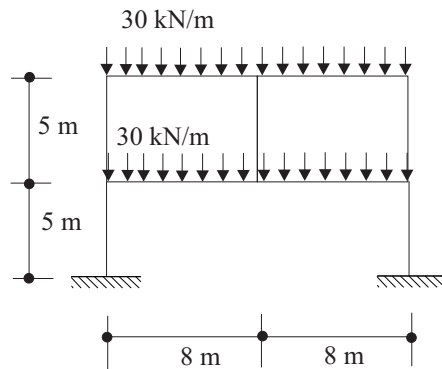


Fig. 14.63

Solució:

Procediment: mètode matricial reduït. La simetria del problema ens permet resoldre solament la meitat de l'estructura; en prendrem la meitat esquerra. Amb la numeració indicada a la figura 12.55, si observem la figura 12.56 arribem a la conclusió que podem substituir la barra 4 per les dues forces de valor $T/2$, essent T l'esforç normal a la barra 4 (fig. 12.57).

Aquesta meitat de l'estructura només té tres graus de llibertat: el gir del nus 2, el gir del nus 3 i el desplaçament vertical del nus 4 (que és igual que el del nus 5) estan indicats a la figura 14.64, com també els eixos locals i globals.

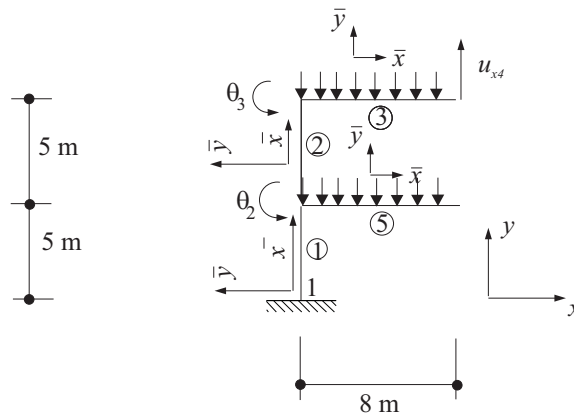


Fig. 14.64



En primer lloc, és evident, per simetria, que

$$f_{y1} = 480 \text{ kN}$$

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & \frac{-6}{l} & 2 \\ \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Considerant únicament els graus de llibertat de l'estructura, la matriu de rigidesa reduïda en coordenades locals de la barra 1 serà, doncs,

$$\bar{\mathbf{K}}^{(1)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 4 \end{pmatrix} \theta_2 = \mathbf{K}^{(1)}$$

ja que els girs són independents de l'orientació dels eixos.

Per a la barra 2, podem escriure directament, per la mateixa raó que a la 1,

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Per a la barra 3,

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{10^5}{8} \begin{pmatrix} \theta_3 & u_{y4} \\ 4 & -6/8 \\ -6/8 & 12/8^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

i, per a la 5,

$$\mathbf{K}^{(5)} = \frac{10^5}{8} \begin{pmatrix} \theta_2 & u_{y4} \\ 4 & -6/8 \\ -6/8 & 12/8^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

Sumant per als diferents graus de llibertat, obtenim la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura



$$\mathbf{K} = 10^5 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{8} & \frac{2}{5} & \frac{-6}{8^2} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{8} + \frac{4}{5} & \frac{-6}{8^2} \\ \frac{-6}{8^2} & \frac{-6}{8^2} & \frac{12}{8^3} + \frac{12}{8^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

L'equació de rigidesa reduïda serà, doncs, tenint en compte les càrregues repartides,

$$\begin{pmatrix} -160 \\ -160 \\ -240 \end{pmatrix} = 10^8 \begin{pmatrix} 2,1 & 0,4 & -0,093 \\ 0,4 & 1,3 & -0,093 \\ -0,093 & -0,093 & 0,046 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ u_{y4} \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} \theta_2 &= -0,0027 \text{ rad} \\ \theta_3 &= -0,0052 \text{ rad} \\ u_{y4} &= u_{y5} = -0,068 \text{ m} \end{aligned}$$

Un cop tenim els graus de llibertat calculats, fent el desglossament de cada una de les barres, podem calcular els esforços en els extrems respectius. Substituint a l'equació de rigidesa en coordenades locals 14.34, tindrem, per a la barra 1 (fig. 14.65),

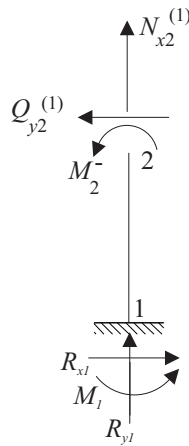


Fig. 14.65

$$\begin{pmatrix} -R_{x1} \\ M_1 \\ Q_{y2}^{(1)} \\ M_2^- \end{pmatrix} = \frac{10^5}{5} \begin{pmatrix} 0,48 & 1,2 & -0,48 & 1,2 \\ 1,2 & 4 & -1,2 & 2 \\ -0,48 & -1,2 & 0,48 & -1,2 \\ 1,2 & 2 & -1,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0027 \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

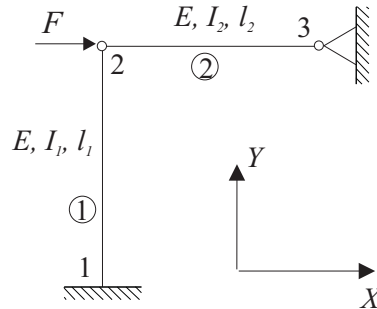
$$\begin{aligned} R_{x1} &= 64,8 \text{ kN} \\ M_1 &= -108 \text{ kNm} \end{aligned}$$

El mateix faríem per a les altres barres si ens interessés calcular-ne els moments, els esforços de cisallament i els esforços normals.

Problema 14.16

Resoleu l'estructura de la figura 14.66. $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa, $A = 8 \cdot 10^{-4}$ m², $I = 10^{-8}$ m⁴, $F = 10^5$ N, $l_1 = l_2 = 5$ m. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

Fig. 14.66



Solució:

Procediment: mètode matricial. Les matrius de rigidesa en coordenades globals són les mateixes que les del problema 14.12; per tant, tindrem, per a la barra 1,

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ \theta_1^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

i, per a la barra 2,

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 201,6 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ 0 & 504 & 1.680 & 0 & -504 & 840 \\ -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -201,6 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 504 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

Per al procés d'augmentar, observem que el vector de desplaçaments generalitzats té deu components: tres als nus 1 (dos desplaçaments i un gir), quatre al nus 2 (dos desplaçaments i dos girs) i tres al nus 3 (dos desplaçaments i un gir). Augmentant, obtindrem, per a la barra 1,



$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_2^{(2)} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Les components que hem afegit són les que ocupen les posicions 7, 8, 9 i 10 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració. Observem també que hem tret els superíndexs a les components, excepte als dos girs del nus 2.

I, per a la 2,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ 0 \\ M_2^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 201,6 & 0 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 0 & 1.680 & 0 & -504 & 840 \\ 0 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 0 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_2^{(2)} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Les components que hem afegit són les que ocupen les posicions 1, 2, 3 i 6 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració.

Sumant i imposant l'equilibri als nusos, obtenim finalment l'equació de rigidesa de l'estructura en coordenades globals,

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2^{(1)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,4 \cdot 10^7 & 0 & 0 & -3,4 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 1680 & 504 & 0 & 840 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -201,6 & 0 & 504 & 33.600,202 & 0 & 504 & 0 & -3,4 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & -3,4 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 33.600,202 & 0 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 0 & 1.680 & 0 & -504 & 840 \\ 0 & 0 & 0 & -3,4 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 3,4 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 0 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_2^{(2)} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$



Les condicions de contorn són, en aquest cas,

$$u_{x1} = u_{y1} = \theta = 1 = u_{x3} = u_{y3} = 0$$

per als desplaçaments, i

$$f_{x2} = 10^5 \text{ N}, f_{y2} = 0, M_2^{(1)} = M_2^{(2)} = 0, M_3 = 0$$

per a les càrregues externes.

Eliminant les files i columnes corresponents als desplaçaments nuls, és a dir, les 1, 2, 3, 7 i 8, obtenim

$$\begin{pmatrix} 10^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33.600,202 & 0 & 504 & 0 & 0 \\ 0 & 33.600,202 & 0 & 504 & 504 \\ 504 & 0 & 1680 & 0 & 0 \\ 0 & 504 & 0 & 1680 & 840 \\ 0 & 504 & 0 & 840 & 1680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_2^{(2)} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema d'equacions, obtenim

$$\begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_2^{(2)} \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0 \\ -0,0008 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Substituint a l'equació de rigidesa completa de l'estructura els valors trobats, obtenim el vector de forces generalitzades

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2^{(1)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,145 \\ 0 \\ 0,75 \\ 10^5 \\ 0 \\ -3,36 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ -10^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observem que el moment en el nus 2 per la banda de la barra 1, que hauria de ser zero, dóna una quantitat molt petita; això és degut al truncament de decimals en el càlcul. D'altra banda, comprovem que es manté l'equilibri de l'estructura, tant pel que fa a forces com pel que fa a moments.

Problema 14.17

Resoleu l'estructura de la figura 14.67. $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $A = 8 \cdot 10^{-4}$ m², $I = 10^{-8}$ m⁴, $F = 10^5$ N, $M = 1000$ Nm, $l_1 = l_2 = 5$ m. Considereu negligible la deformació deguda a l'esforç de cisallament.

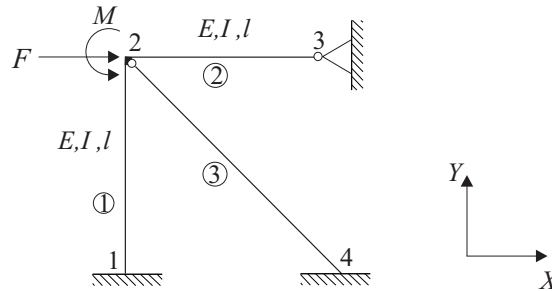


Fig. 14.67

Solució:

Procediment: mètode matricial. La matriu de rigidesa en coordenades locals d'una barra, considerant negligibles les deformacions per cisallament, és 14.31

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{pmatrix} \quad \text{sim}$$

i el pas a coordenades globals s'efectua segons la transformació

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{T}^{(e)})^t \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}$$

on $\mathbf{T}^{(e)}$ és la matriu 14.33

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Per a l'element 1, $c = 0$ i $s = 1$; substituint dades, s'obté

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 \end{pmatrix}$$

Per a l'element 2, $c = 1$ i $s = 0$; per tant,

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 201,6 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ 0 & 504 & 1.680 & 0 & -504 & 840 \\ -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -201,6 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 504 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix}$$

Per a l'element 3, $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; per tant,

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 177,46 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 177,46 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ 178,92 & 178,92 & 1.187,94 & -178,92 & -178,92 & 593,97 \\ -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & -177,46 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & -177,46 \\ 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & -177,46 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & -177,46 \\ 178,92 & 178,92 & 593,97 & -178,92 & -178,92 & 1.187,94 \end{pmatrix}$$

Les equacions de rigidesa en coordenades globals seran, doncs, per a la barra 1

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1}^{(1)} \\ u_{y1}^{(1)} \\ \theta_1^{(1)} \\ u_{x2}^{(1)} \\ u_{y2}^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

i, per a la barra 2,

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 201,6 & 504 & 0 & -201,6 & 504 \\ 0 & 504 & 1.680 & 0 & -504 & 840 \\ -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -201,6 & -504 & 0 & 201,6 & -504 \\ 0 & 504 & 840 & 0 & -504 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(2)} \\ u_{y2}^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \\ u_{x3}^{(2)} \\ u_{y3}^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

i, per a la barra 3,

$$\begin{pmatrix} f_{x2}^{(3)} \\ f_{y2}^{(3)} \\ M_2^{(3)} \\ f_{x4}^{(3)} \\ f_{y4}^{(3)} \\ M_4^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 177,46 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 177,46 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ 178,92 & 178,92 & 1.187,94 & -178,92 & -178,92 & 593,97 \\ -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & -177,46 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & -177,46 \\ 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & -177,46 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & -177,46 \\ 178,92 & 178,92 & 593,97 & -178,92 & -178,92 & 1.187,94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2}^{(3)} \\ u_{y2}^{(3)} \\ \theta_2^{(3)} \\ u_{x4}^{(3)} \\ u_{y4}^{(3)} \\ \theta_4^{(3)} \end{pmatrix}$$

Per al procés d'augmentar, observem que el vector de desplaçaments generalitzats de l'estructura té 13 graus de llibertat: tres al nus 1 (dos desplaçaments i un gir), quatre al nus 2 (dos desplaçaments i dos girs), tres al nus 3 (dos desplaçaments i un gir) i tres al nus 4 (dos desplaçaments i un gir). Augmentant, obtindrem, per a la barra 1,

$$\begin{pmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -201,6 & 0 & 504 & 201,6 & 0 & 504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 0 & 1.680 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_2^{(3)} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Les components que hem afegit són les que ocupen les posicions 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 13 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració.

Per a la 2,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(2)} \\ f_{y2}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ 0 \\ f_{x3}^{(2)} \\ f_{y3}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 201,6 & 504 & 0 & 0 & -201,6 & 504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 1.680 & 0 & 0 & -504 & 840 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -201,6 & -504 & 0 & 0 & 201,6 & -504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 840 & 0 & 0 & -504 & 1.680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_2^{(3)} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$



Les components que hem afegit són les que ocupen les posicions 1, 2, 3, 7, 11, 12 i 13 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració.

I, per a la 3,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{x2}^{(3)} \\ f_{y2}^{(3)} \\ 0 \\ M_2^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{x4}^{(3)} \\ f_{y4}^{(3)} \\ M_4^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 0 & 177,46 & 0 & 0 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ 0 & 0 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 0 & 177,46 & 0 & 0 & 0 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 178,92 & 178,92 & 0 & 1.187,94 & 0 & 0 & 0 & -178,92 & -178,92 & 593,97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 0 & -177,46 & 0 & 0 & 0 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & -177,46 \\ 0 & 0 & 0 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 0 & -177,46 & 0 & 0 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & -177,46 \\ 0 & 0 & 0 & 178,92 & 178,92 & 0 & 593,97 & 0 & 0 & 0 & -178,92 & -178,92 & 1.187,94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_2^{(3)} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Les components que hem afegit són les que ocupen les posicions 1, 2, 3, 6, 8, 9 i 10 al vector de desplaçaments generalitzats; per tant, hem afegit zeros a les files i columnes d'igual numeració.

Sumant i imposant l'equilibri als nusos, obtenim finalment l'equació de rigidesa de l'estructura en coordenades globals

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ M_2^{(3)} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \\ f_{x4} \\ f_{y4} \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 201,6 & 0 & -504 & -201,6 & 0 & -504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 66 \cdot 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -504 & 0 & 1.680 & 504 & 0 & 840 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -201,6 & 0 & 504 & 454 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 504 & 177,46 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 454 \cdot 10^5 & 504 & 177,46 & 0 & -202 & 504 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 177,46 \\ -504 & 0 & 840 & 504 & 3.360 & 0 & 0 & -504 & 840 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 178,92 & 178,92 & 0 & 1.187,94 & 0 & 0 & 0 & -178,92 & -178,92 & 593,97 \\ 0 & 0 & 0 & -336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 336 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -201,6 & -504 & 0 & 0 & 201,6 & -504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 504 & 840 & 0 & 0 & -504 & 1.680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & 0 & -177,46 & 0 & 0 & 0 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & -177,5 \\ 0 & 0 & 0 & 118 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 0 & -177,46 & 0 & 0 & 0 & -118 \cdot 10^5 & 118 \cdot 10^5 & -177,5 \\ 0 & 0 & 0 & 178,92 & 178,92 & 0 & 593,97 & 0 & 0 & 0 & -178,92 & -178,92 & 1.187,94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_2^{(3)} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ \theta_3 \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Imposant les condicions de contorn,

$$u_{x1} = u_{y1} = \theta_1 = u_{x3} = u_{y3} = u_{x4} = u_{y4} = \theta_4 = 0$$

per als desplaçaments i girs, i

$$f_{x2} = 10^5 \text{ N}, f_{y2} = 0, M_2 = 1.000 \text{ Nm}, M_2^{(3)} = M_3 = 0$$

per a les càrregues externes. Eliminant, doncs, les files i columnes 1, 2, 3, 8, 9, 11, 12 i 13, que corresponen a les components que són zero en els desplaçaments i girs, i imposant les condicions per a les càrregues,



$$\begin{pmatrix} 10^5 \\ 0 \\ 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 454 \cdot 10^5 & -118 \cdot 10^5 & 504 & 177,46 & 0 \\ -118 \cdot 10^5 & 454 \cdot 10^5 & 504 & 177,46 & 504 \\ 504 & 504 & 3,360 & 0 & 840 \\ 178,92 & 178,92 & 0 & 1187,94 & 0 \\ 0 & 504 & 840 & 0 & 1.680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_2^{(3)} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_2^{(3)} \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,002355221 \\ 0,00061331 \\ 0,339679733 \\ -0,000443453 \\ -0,170023859 \end{pmatrix}$$

i, substituint aquests valors a l'equació de rigidesa de tota l'estructura, tindrem

$$\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ M_2^{(3)} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \\ f_{x4} \\ f_{y4} \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -171,673398 \\ -20.607,2007 \\ 286,518007 \\ 10^5 \\ 0,00561072 \\ 1000 \\ -8,3739 \cdot 10^{-8} \\ -79.135,4256 \\ -85,6302035 \\ -5,6843 \cdot 10^{-14} \\ -20.692,8795 \\ 20.692,8253 \\ 0,26339767 \end{pmatrix}$$

Comprovem que es manté l'equilibri de l'estructura, tant pel que fa a forces com pel que fa a moments. El moment $M_2^{(3)}$ dona un valor molt petit, que podem considerar pràcticament zero.

Problema 14.18

Calculeu els moviments dels nusos de la figura 14.68 i les reaccions en els suports. Negligiu les deformacions per esforços normals i per cisallament.

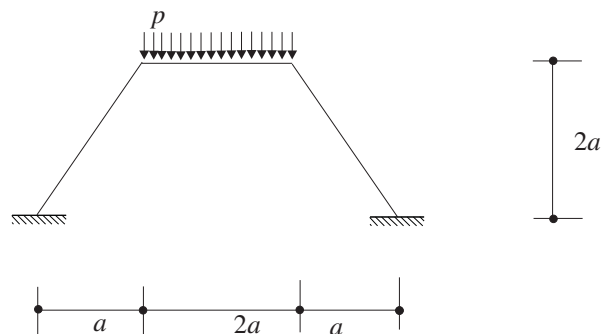
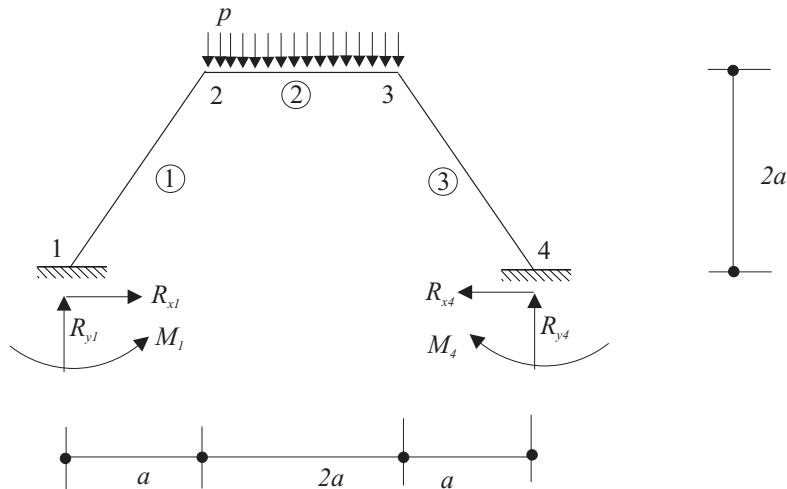


Fig. 14.68

Solució:

Procediment: mètode matricial reduït. En primer lloc, numerem els nusos i les barres (fig. 14.69)

Fig. 14.69



Si negligim les deformacions per esforços normals, la component del desplaçament del nus 2 en la direcció de la barra 1 ha de ser zero però, com que, a més, per simetria, el nus 2 no es mou horitzontalment, la conclusió és que el desplaçament vertical del nus 2 també serà zero. És a dir, el nus 2 solament pot girar.

Al nus 3, per simetria, li passa el mateix que al nus 2, és a dir, només pot girar. Així doncs, hi ha dos graus de llibertat no prescrits: θ_2 i θ_3 .

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Així doncs, per a la barra 1, la matriu de rigidesa reduïda és

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{a\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 4 \end{pmatrix} \theta_2$$



per a la barra 2,

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{2a} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

i, per a la 3,

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{EI}{a\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ 4 \end{pmatrix} \theta_3$$

La matriu de rigidesa reduïda de l'estructura serà, doncs,

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{a} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{4}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{4}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

i l'equació de rigidesa reduïda, tenint en compte les càrregues repartides

$$\begin{pmatrix} \frac{-p4a^2}{12} \\ \frac{p4a^2}{12} \end{pmatrix} = \frac{EI}{a} \begin{pmatrix} 3,79 & 1 \\ 3,79 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

d'on

$$\theta_2 = -0,12 \frac{p a^3}{EI}$$

$$\theta_3 = 0,12 \frac{p a^3}{EI}$$

Aplicant l'equació de rigidesa reduïda a la barra 1 (fig. 14.70),

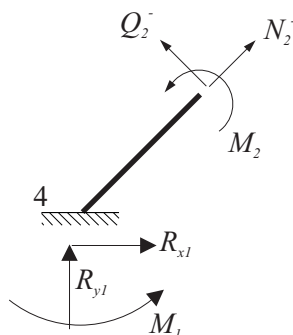


Fig. 14.70

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{a\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0,12 \frac{pa^3}{EI} \end{pmatrix}$$

d'on

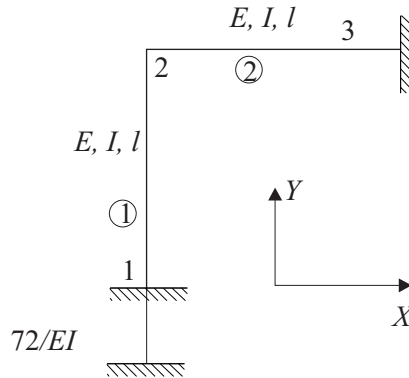
$$\begin{aligned} M_1 &= -0,107pa^2 \\ M_2 &= -0,214pa^2 \end{aligned}$$

Per simetria, $M_4 = -0,214pa^2$

Problema 14.19

Resoleu l'estructura de la figura 14.71 en la qual es produeix un assentament de valor $72/EI$ en el nus 1. Negligiu les deformacions per esforços normals i per cisallament, i preneu $l = 5m$, $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ a les dues barres. (Observeu que no hi ha càrregues externes; solament les reaccions que puguin aparèixer).

Fig. 14.71



Solució:

Procediment: mètode matricial reduït. Analitzem la situació nus per nus: el nus 1 no pot experimentar desplaçament horitzontal ni gir, i té prescrit el desplaçament vertical u_{y1} . El nus 2 no pot tenir desplaçament horitzontal perquè això implicaria que la barra 2 s'allargaria o s'escurçaria; en canvi, si pot tenir desplaçament vertical u_{y1} , que ha de ser igual al del nus 1; també pot tenir gir θ_2 . El nus 3 no pot experimentar cap desplaçament ni gir.

En resum, doncs, l'estructura té un grau de llibertat no prescrit, θ_2 , i un grau de llibertat, u_{y2} , prescrit a un valor diferent de zero mitjançant una lligadura. Seguint el procediment dels multiplicadors de Lagrange descrit a 14.2, obtenim l'equació de rigidesa sense lligadura i, a continuació, formem i resollem el sistema augmentat per multiplicadors de Lagrange.

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34



$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Considerant, doncs, únicament els graus de llibertat θ_2 i u_{y2} , tindrem, per la matriu de rigidesa reduïda en coordenades locals de la barra 1,

$$\bar{K}^{(1)} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 4 \end{pmatrix} \theta_2 = K^{(1)} \quad (14.57)$$

La matriu de rigidesa en coordenades locals i globals coincideix ja que el gir és l'únic grau de llibertat existent.

Per a la barra 2,

$$\bar{K}^{(2)} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} u_{y2} & \theta_2 \\ 12/25 & 6/5 \\ 6/5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix} = K^{(2)} \quad (14.58)$$

i, sumant per a cada un dels graus de llibertat, és a dir, acoblant la matriu reduïda de l'estructura,

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} u_{y2} & \theta_2 \\ 12/25 & 6/5 \\ 6/5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Així, l'equació de rigidesa reduïda de l'estructura serà, substituint dades

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} 12/25 & 6/5 \\ 6/5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

La condició de lligadura es pot escriure com $u_{y2} = -72/EI$; així l'equació de rigidesa augmentada per multiplicadors de Lagrange serà

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -72/5 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} 12/25 & 6/5 & 1 \\ 6/5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

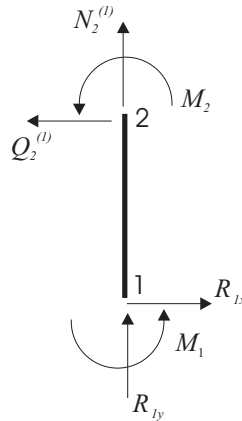
i, resolent, obtenim

$$\theta_2 = 10,8/EI \text{ rad}$$



Un cop ja hem calculat l'únic grau de llibertat no prescrit, en fem el desglossament per a cada una de les barres. Per a la barra 1 (fig. 14.72), l'equació de rigidesa en coordenades locals serà

Fig. 14.72



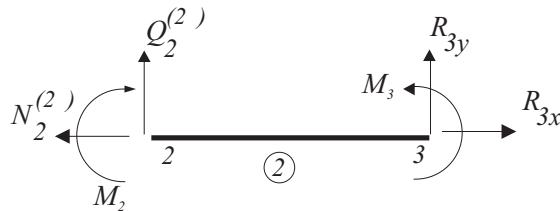
$$\begin{pmatrix} -R_{1x} \\ M_1 \\ Q_2^{(1)} \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} 12/25 & 6/5 & -12/25 & 6/5 \\ 6/5 & 4 & -6/5 & 2 \\ -12/25 & -6/5 & 12/25 & -6/5 \\ 6/5 & 2 & -6/5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10,8/EI \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} R_{1x} &= -2,59 \text{ kN} \\ M_1 &= 4,32 \text{ kNm} \\ Q_2^{(1)} &= -2,59 \text{ kN} \\ M_2 &= 8,64 \text{ kNm} \end{aligned}$$

i, per a la barra 2 (fig. 14.73),

Fig. 14.73



$$\begin{pmatrix} Q_2^{(2)} \\ -M_2 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} 12/25 & 6/5 & -12/25 & 6/5 \\ 6/5 & 4 & -6/5 & 2 \\ -12/25 & -6/5 & 12/25 & -6/5 \\ 6/5 & 2 & -6/5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -72/EI \\ 10,8/EI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{aligned} Q_2^{(2)} &= -4,32 \text{ kN} \\ R_{3y} &= 4,32 \text{ kN} \\ M_3 &= -12,96 \text{ kNm} \end{aligned}$$



Considerant l'equilibri de tota l'estructura (fig. 14.74), obtenim

$$R_{1y} = -4,32 \text{ kN}$$

$$R_{3x} = 2,59 \text{ kN}$$

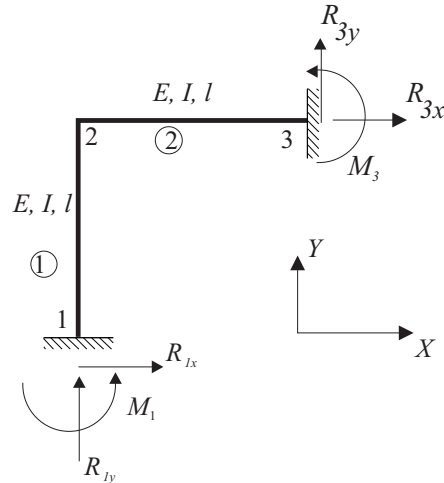


Fig. 14.74

Problema 14.20

Resoleu l'estructura de la figura 14.75, on els suports 1 i 4 són articulacions elàstiques de rigidesa $k = 10^5 \text{ kNm/rad}$. Preneu $EI = 2 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$ i negligiu les deformacions per esforços normals i per cisallament.

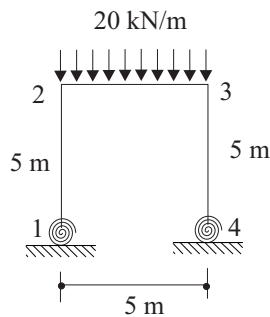


Fig. 14.75

Solució:

Procediment: mètode matricial reduït. Per simetria, els nusos 2 i 3 no es poden moure horitzontalment ni verticalment ja que negligim les deformacions per esforços normals.

El fet que en els nusos 1 i 4 hi hagi articulacions elàstiques vol dir que hi ha una relació lineal entre els moments i girs en aquests punts, és a dir, es compleix

$$\begin{aligned} M_1 &= -k\theta_1 \\ M_4 &= -k\theta_4 \end{aligned} \quad (14.59)$$

Les equacions 14.59 representen, doncs, dues condicions de lligadura. Observem, però, que es tracta d'unes lligadures diferents de les que hem vist fins ara; tenim en aquesta ocasió unes relacions entre les càrregues generalitzades i els desplaçaments generalitzats.

El procediment de càlcul consistirà a considerar els graus de llibertat sotmesos a lligadura, que són θ_1 i θ_4 , com a no prescrits, és a dir, incloure'ls en l'equació de rigidesa reduïda, i, a continuació, substituir-hi 14.59.

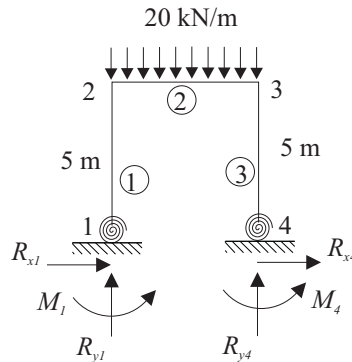
Així doncs, hi haurà dos graus de llibertat no prescrits, que són els girs θ_2 i θ_3 , i dos graus de llibertat subjectes a condicions de lligadura, que són θ_1 i θ_4 .

L'equació de rigidesa en coordenades locals d'una barra, negligint les deformacions per esforços de cisallament, ve donada per 14.34

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{pmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{yi} \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix}$$

Així, les matrius de rigidesa reduïdes de les barres, un cop numerades aquestes (fig. 14.76), són

Fig. 14.76



$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

i la matriu de rigidesa reduïda de l'estructura serà

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

L'equació de rigidesa reduïda, tenint en compte les càrregues equivalents, serà

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ -41,66 \\ 41,66 \\ M_4 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

i, substituint les equacions de lligadura 14.59,

$$\begin{pmatrix} -k\theta_1 \\ -41,66 \\ 41,66 \\ -k\theta_4 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Passant a la dreta les components primera i quarta del vector de forces generalitzades, el sistema queda transformat en

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -41,66 \\ 41,66 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} 4+k\frac{5}{EI} & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4+k\frac{5}{EI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

d'on, substituint valors, obtenim

$$\theta_1 = 5,95 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_2 = -19,34 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 10,34 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

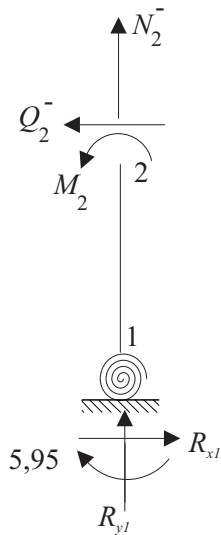
$$\theta_4 = -5,95 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Els esforços als extrems de les barres i, per tant, també les reaccions externes, els obtenim aplicant l'equació de rigidesa en coordenades locals a cada una de les barres.



Per a la barra 1 (fig. 14.77),

Fig. 14.77

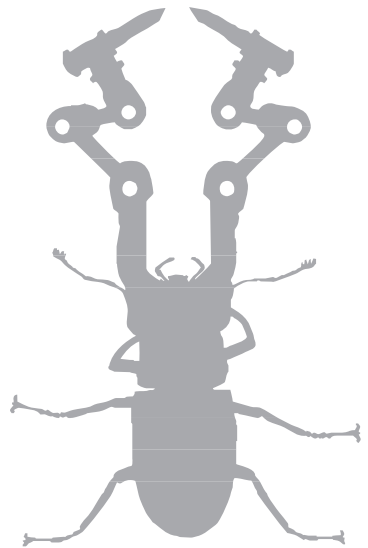


$$\begin{pmatrix} -R_{x1} \\ -5,95 \\ Q_2^- \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{5} \begin{pmatrix} \frac{12}{5^2} & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5^2} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & 4 & -\frac{6}{5} & 2 \\ -\frac{12}{5^2} & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5^2} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & 2 & -\frac{6}{5} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5,95 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ -19,34 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

d'on

$$R_{x1} = 6,42 \text{ kN}$$

Per simetria, $R_{y1} = R_{y4} = 50 \text{ kN}$ i segons 14.59, $M_4 = 5,95 \text{ kNm}$







Bibliografia

- [1] Beer, F.P. & Johnston, R. *Mecánica de materiales*. McGraw-Hill, 1991.
- [2] Boresi, Arthur P. *Elasticity in Engineering Mechanics*. Prentice-Hall, 1974.
- [3] Canet, Juan Miquel. *Cálculo de estructuras. Libro 2. Sistemas de piezas prismáticas*. Edicions UPC, 2000.
- [4] Comas Alavedra, Juan. *Elasticidad básica*. Universitat Politècnica de Catalunya, 1980.
- [5] Felippa, Carlos A. *Introduction to Finite Elements Methods*, 2001.
- [6] Fung, Y.C. *A First Course in Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, 1977.
- [7] Fung, Y.C. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, 1965.
- [8] Landau, L. & Lifchitz, E. *Théorie d'élasticité*. Éditions Mir, 1967.
- [9] Love, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Nova York, Dover Publications, 1944.
- [10] Przemieniecki, J.S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, 1968.
- [11] Sokolnikoff, I.S. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1956.
- [12] Tauchert, Theodore. *Energy Principles in Structural Mechanics*. McGraw-Hill, 1974.
- [13] Timoshenko, S. & Godier, J.N. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1951.



Índex analític

acoblament, 366
angle de torsió, 239
àrea reduïda, 227, 320
articulació, 43

barra, 39

càrrega crítica, 269
cas bidimensional, 41
centre de cisallament, 222
centre de flexió, 222
coeficient de dilatació lineal, 137
coeficient de flexibilitat, 316
coeficient de Poisson, 30
coeficient de rigidesa, 317
condicions de lligadura, 367
constants de Lamé, 29
curvatura, 170

deformació angular mitjana, 227
deformació angular, 18
deformació angular mitjana ponderada, 321
deformació elàstica, 9
deformació en un punt i en una direcció, 17
deformació plàstica, 9
deformació virtual, 323
deformacions axials, 14
deformacions de cisallament, 14
deformacions longitudinals, 14
deformacions normals, 14
deformacions tallants, 14
deformacions tangencials, 14
densitat d'energia complementària de
deformació, 314

densitat d'energia de deformació, 314
directriu, 39

eix neutre, 173
el·lipsoide de Lamé, 28
El problema elàstic, 31
encastament, 43
energia complementària de deformació, 324
energia interna, 314
energia potencial total, 327
energia potencial total complementària, 328
equació de Navier, 31
equació característica, 27
equació de rigidesa reduïda, 368
equacions de compatibilitat, 20
equacions de compatibilitat de
Beltrami-Michell, 31
equacions de compatibilitat de Saint-Venant,
20
equacions de la deformada, 171
equacions de Navier-Bresse, 277
esforços, 40
esforços interns, 40
esforç de cisallament, 41
esforç normal, 41
esforços interns, 9, 21
estructura articulada, 362
estructura reticulada, 362
excentricitat, 173

fórmula d'Euler, 271
fórmula de Clapeyron, 316



- flexió desviada, 161
- flexió pura, 41, 161
- flexió pura desviada, 161
- flexió pura recta, 161
- funció de bombament de Saint-Venant, 239
- funció de tensions, 221
- funció de torsió, 239
- graus de llibertat de l'estructura, 361
- hipòtesi de Navier, 41
- hiperestàtica, 44
- isòtrop, 29
- isostàtica, 44
- línia neutra, 166, 169, 202
- linealment elàstic, 29
- lleï de Colignon, 225
- lleï de Hooke generalitzada, 29
- lleï de Maxwell, 327
- lligadura múltiple, 370
- lligadura simple, 370
- mètode semiinvers de Saint-Venant, 220
- mètode de la càrrega unitat, 326
- mètode dels elements finits, 362
- mètode directe de rigidesa, 362
- mètode matricial reduït, 384
- mòdul de rigidesa, 29
- mòdul de Young, 30
- matriu de flexibilitat, 316
- matriu de rigidesa, 317
- matriu de rigidesa reduïda, 368
- matriu de transformació de les forces, 365
- matriu de transformació dels desplaçaments, 365
- model d'Euler-Bernoulli, 41
- moment estàtic de la secció, 225
- moment flector, 41
- moment torsor, 41
- multiplicadors de Lagrange, 370
- nucli central, 203
- paràmetre de deformació per cisallament, 376
- peça prismàtica, 39
- plans principals, 27
- primer teorema de Castigliano, 328
- principi de l'energia potencial total complementària mínima, 328
- principi de l'energia potencial total mínima, 327
- principi de superposició, 10
- principi del treball virtual, 323
- principi del treball virtual complementari, 325
- procediment semiinvers, 239
- radi de gir, 380
- rigidesa a la flexió, 166
- rigidesa a la torsió, 241, 322
- rigidesa a la tracció o compressió, 136
- rigidesa al cisallament, 321
- rodet, 43
- rotació unitària local, 222
- secció transversal, 39
- segon teorema de Castigliano, 329
- sistema augmentat per multiplicadors de Lagrange, 371
- sistema de coordenades global, 362
- sistema de coordenades local, 363
- tensió, 22
- tensió de cisallament, 22
- tensió normal, 22
- tensió plana, 23
- tensions de membrana, 138
- tensions principals, 27
- tensor de deformacions, 14
- tensor de mòduls elàstics, 29
- tensor de rotacions, 16
- tensor de tensions, 21
- teorema d'Engesser, 329
- teorema de l'energia, 317
- teorema de la càrrega unitat, 326
- teorema del desplaçament unitat, 324
- teorema recíproc de Betti, 327
- teoria elemental de les barres, 223
- torsió, 41, 235
- tracció o compressió excèntrica, 41, 201
- tracció o compressió pura, 41, 131
- treball virtual complementari, 324
- vector de càrregues generalitzades, 362
- vector de curvatura, 170
- vector de desplaçaments generalitzats, 363
- vector rotació, 16
- vector rotació unitària, 167
- vinclament, 171, 269